

Transformace náhodných veličin

V technických aplikacích se většinou nepracuje s výsledky měření, ale ty se dosazují do vzorců, pracujeme tedy s určitými funkcemi náhodných veličin.

Známe zákon rozdělení náhodné veličiny X . Hledáme zákon rozdělení náhodné veličiny Y , která je funkcí X :

$$Y = h(X),$$

kde h je reálná funkce jedné reálné proměnné definovaná na oboru hodnot náhodné veličiny X (funkci h tedy známe).

Označení:

$$X \sim f(x) \sim F(x), \Omega_X - \text{známe}$$

$$Y = h(X) - \text{víme}$$

$$Y \sim g(y) \sim G(y), \Omega_Y - \text{chceme určit}$$

Libovolnou transformací h diskrétní náhodné veličiny musí vzniknout diskrétní náhodná veličina.

Různými transformacemi spojitě náhodné veličiny však nemusí vzniknout veličina spojitá.

Věta 1 (Transformace diskrétní n. v.)

Nechť X a Y jsou dvě diskrétní náhodné veličiny a nechť náhodná veličina Y vznikla transformací h náhodné veličiny X , tj. $Y = h(X)$. Označme Ω_X [Ω_Y] obor hodnot náhodné veličiny X [Y] a p [q] pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X [Y]. Je-li funkce h prostá na množině Ω_X , potom pro pravděpodobnostní funkci q náhodné veličiny Y platí

$$q(y) = \begin{cases} p(h^{-1}(y)) & \text{pro } y \in \Omega_Y \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

kde h^{-1} je funkce inverzní k funkci h .

Poznámka: Inverzní funkci h^{-1} k funkci h získáme tak, že z rovnice $y = h(x)$ vyjádříme x . Výsledek označíme $x = h^{-1}(y)$.

Věta 2 (Transformace spojitě n. v.)

Nechť X a Y jsou dvě spojitě náhodné veličiny a nechť náhodná veličina Y vznikla transformací h náhodné veličiny X , tj. $Y = h(X)$. Označme Ω_X [Ω_Y] obor hodnot náhodné veličiny X [Y] a f [g] hustotu náhodné veličiny X [Y]. Je-li funkce h prostá na množině Ω_X a má-li uvnitř množiny Ω_X spojitou první derivaci, potom pro hustotu g náhodné veličiny Y platí

$$g(y) = \begin{cases} f(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right| & \text{pro } y \in \Omega_Y \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

kde h^{-1} je funkce inverzní k funkci h .

Obecný postup pro spojitou náhodnou veličinu:

I. Vyjdeme z definičního vztahu pro distribuční funkci G náhodné veličiny Y a vyjádříme G pomocí distribuční funkce F náhodné veličiny X .

II. Určíme hustotu náhodné veličiny Y , tj.

$$g(y) = \frac{d}{dy} G(y).$$