Výpočet realizací výběrových statistik. Aplikační příklady na jejich rozdělení.

Vlastnosti bodových odhadů

1. Statistika $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ je *nestranný* neboli *nevychýlený odhad parametru* ϑ_i, jestliže $E_\vartheta(T) = \vartheta_i$ pro libovolnou realizaci $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) \in \Theta$.

2. Statistiku $T = t(X_1, \ldots, X_n)$ nazýváme *nejlepší nestranný odhad* ϑ_i, jestliže $D_\vartheta(T) \leq D_\vartheta(T^*)$ pro libovolné $\vartheta \in \Theta$, libovolný nestranný odhad T^*.

3. Statistika $T = T_n = t_n(X_1, \ldots, X_n)$ je *konzistentní odhad parametru* ϑ_i, jestliže platí součastně $\lim\limits_{n\to\infty} E_\vartheta(T_n) = \vartheta_i$, $\lim\limits_{n\to\infty} D_\vartheta(T_n) = 0$.

Bodový odhad parametrů rozdělení

A netříděná data – pro nepříliš rozsáhlý soubor dat $x_1, \ldots, x_n$.

▶ bodový odhad $\widehat{\mu}$ střední hodnoty μ:

$$\widehat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

... tzv. *výběrový průměr*

▶ bodový odhad $\widehat{\sigma^2}$ rozptylu σ^2 **ne**známe-li střední hodnotu μ:

$$\widehat{\sigma^2} = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

... tzv. *výběrový rozptyl*

▶ bodový odhad $\widehat{\sigma^2}$ rozptylu σ^2 známe-li střední hodnotu μ:

$$\widehat{\sigma^2} = s_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

▶ bodový odhad $\widehat{\sigma}$ směrodatné odchylky σ **ne**známe-li střední hodnotu μ:

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{s^2}$$

▶ bodový odhad $\widehat{\sigma}$ směrodatné odchylky σ známe-li střední hodnotu μ:

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{s_0^2}$$

B tříděná data – pro velký soubor pozorování (n velké).

Data $\Omega = \{x_1, \ldots, x_n\}$ roztřídíme do k disjunktních tříd (intervalů) $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_k$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, počet tříd často bereme $k \approx \sqrt{n}$, třídy všechny nejlépe stejné délky. Označíme

n_j ...počet prvků ve třídě Ω_j, *absolutní četnost*, $\sum\limits_{j=1}^{k} n_j = n$

$\bar{x_j}$ ...střed třídy Ω_j (tj. střed intervalu Ω_j)

Výše uvedené vzorce pro bodové odhady mají pro tříděná data tvar:

$$\widehat{\mu} = \bar{x} \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j \bar{x_j}$$

$$\widehat{\sigma^2} = s^2 \approx \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x_j} - \bar{x})^2,\ \widehat{\sigma} = \sqrt{s^2}$$

$$\widehat{\sigma^2} = s_0^2 \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x_j} - \mu)^2,\ \widehat{\sigma} = \sqrt{s_0^2}$$

Tvrzení 2.2: *Odhady střední hodnoty a rozprylu* Pro náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ platí:

1. Nejlepším nestranným a konzistentním odhadem střední hodnoty μ je výběrový průměr $\bar{X}$.

2. Nejlepším nestranným a konzistentním odhadem rozptylu σ^2 je:
   - výběrový rozptyl S^2 v případě, že neznáme střední hodnotu μ;
   - statistika S_0^2 v případě, že známe střední hodnotu μ,

Pro náhodný výběr z jiného rozdělení s konečnou střední hodnotou μ a konečným rozptylem σ^2 jsou uvedené odhady nestranné a konzistentní.