

Využití vektorového počtu v analytické geometrii

Rovina v \mathbb{E}_3

1. **Parametrická rovnice roviny:** $X = A + t\vec{u} + s\vec{v}$,

kde $t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Rozepsáno do souřadnic:

$$x = x_A + tu_1 + sv_1$$

$$y = y_A + tu_2 + sv_2$$

$$z = z_A + tu_3 + sv_3$$

2. **Obecná rovnice roviny:** $ax + by + cz + d = 0$,

kde a, b, c , jsou souřadnice normálového vektoru roviny ρ , tj. $\vec{n} = (a, b, c)$.

Přímka v \mathbb{E}_3

1. **Parametrická rovnice přímky:** $X = A + t\vec{u}$,

kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. Rozepsáno do souřadnic:

$$x = x_A + tu_1$$

$$y = y_A + tu_2$$

$$z = z_A + tu_3$$

2. **Přímka jako průsečnice dvou rovin:**

směrový vektor \vec{u} přímky je kolineární s vektorem $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

$$p : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Vzájemná poloha dvou rovin

Roviny α a β s normálovými vektory $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ jsou:

1. rovnoběžné totožné $\iff \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$
2. rovnoběžné různé $\iff \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \emptyset$
3. různoběžné $\iff \vec{n}_\alpha \neq k\vec{n}_\beta$

Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka $p = [A; \vec{u}]$ a rovina $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ s normálovým vektorem \vec{n} :

1. přímka p leží v rovině α $\iff \vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = p$
2. přímka p je rovnoběžná s rovinou α $\iff \vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = \emptyset$
3. přímka p je různoběžná s rovinou α $\iff \vec{u} \not\perp \vec{n}$

Vzájemná poloha dvou přímek

Přímky $p = [A; \vec{u}_p]$, $q = [B; \vec{u}_q]$ jsou:

1. rovnoběžné totožné $\iff \vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = p = q$
2. rovnoběžné různé $\iff \vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$
3. různoběžné $\iff \vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \{R\}$
4. mimoběžné $\iff \vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$

Úlohy metrické

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ dvou přímek p, q je úhlem jejich směrových vektorů \vec{u}_p, \vec{u}_q :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{\|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{u}_q\|}$$

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ dvou rovin α, β je úhlem jejich normálových vektorů $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$$

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ přímky p a roviny α je doplňkem úhlu ψ směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny do $\frac{\pi}{2}$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$.

Protože $\vec{u} \cdot \vec{n} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cos \psi = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \sin \varphi$, platí

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\|}$$

Nejkratší vzdálenost mimoběžek $p = [A; \vec{u}_p]$, $q = [B; \vec{u}_q]$ je určena výškou rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{u}_p, \vec{u}_q, \overrightarrow{AB}$:

$$v = \frac{|[\vec{u}_p, \vec{u}_q, \overrightarrow{AB}]|}{\|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\|}$$