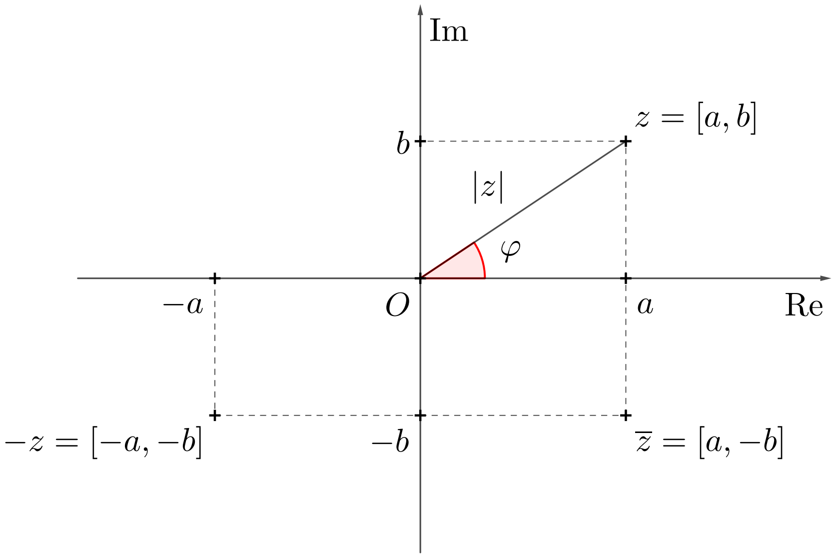
KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Komplexní číslo: každá uspořádaná dvojice reálných čísel $z = [a, b]$



algebraický tvar: $z = a + bi$

imaginární jednotka i : $i = [0, 1]$ a platí $i^2 = -1$

argument komplexního čísla φ : $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, platí $\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}$; $\sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}$

velikost (absolutní hodnota) komplexního čísla $z = a + bi$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

reálná část komplexního čísla: $Re\ z = a$

imaginární část komplexního čísla: $Im\ z = b$

číslo opačné ke komplexnímu číslu $z = a + bi$: $-z = -a - bi$

číslo komplexně sdružené ke komplexnímu číslu $z = a + bi$: $\bar{z} = a - bi$

množina všech komplexních čísel: Gaussova rovina

goniometrický tvar komplexního čísla: $z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Moivreova věta:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Početní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru.

Příklad 1.
a) Vypočtěte i^{376}.

b) Určete součet S, rozdíl R, součin N a podíl P komplexních čísel $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 4 - 3i$.

c) Určete velikost (absolutní hodnotu) komplexního čísla $z = 3 - 2i$.

Řešení:
a) Využijeme mocnin imaginární jednotky

$i \ \rightarrow \ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1;$

i^{376} převedeme na mocninu $i^4 \ \Rightarrow \ 376 : 4 = 94 \ \Rightarrow i^{376} = \left(i^4\right)^{94} = 1^{94} = 1.$

b)
$$\begin{aligned} S &= (-2+3i)+(4-3i)=2, \\ R &= (-2+3i)-(4-3i)=-6+6i, \\ N &= (-2+3i)\cdot(4-3i)=-8+12i+6i-9i^2=1+18i, \\ P &= \frac{z_1}{z_2}=\frac{-2+3i}{4-3i}=\frac{-2+3i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i}=\frac{-8+12i-6i+9i^2}{16-9i^2}=\frac{-17+6i}{16+9}=-\frac{17}{25}+\frac{6}{25}i. \end{aligned}$$

Při dělení komplexních čísel rozšíříme zlomek číslem komplexně sdruženým k číslu ve jmenovateli.

c) Velikost komplexního čísla je $|z|=\sqrt{a^2+b^2} \;\Rightarrow\; |z|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

Příklad 2. Určete reálnou a imaginární složku komplexního čísla $z=3i^2+2i^3-i^4+3i^5$.

Řešení: Můžeme postupovat tak, že vytkneme $i^2 \;\Rightarrow\; z = i^2\left(3+2i-i^2+3i^3\right)$, vypočteme mocniny $\Rightarrow\; z=-1\,(3+2i+1-3i)=-\,(4-i)=-4+i$ a pak $Re\,z=-4,\ Im\,z=1$.

Příklad 3. Určete velikost (absolutní hodnotu) komplexního čísla $z=2i-3i^2+6i^3-7i^8$.

Řešení:
$z=2i+3-6i-7=-4-4i$ (opět využíváme mocnin čísla i)
$|z|=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{2\cdot 16}=4\sqrt{2}$.

Početní operace s komplexními čísly vyjádřenými v goniometrickém tvaru.

Příklad 4. Vyjádřete komplexní číslo z
a) v algebraickém tvaru, $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,
b) v goniometrickém tvaru, $z=2+2\sqrt{3}i$.

Řešení:
a)
$$\begin{aligned} &\cos\varphi=\frac{a}{|z|},\ \sin\varphi=\frac{b}{|z|}, \\ &z=a+bi,\ |z|=2, \\ &a=|z|\cdot\cos\varphi=2\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}, \\ &b=|z|\cdot\sin\varphi=2\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Pak $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

b) $|z|=\sqrt{4+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16}=4$,
$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi&=\frac{a}{|z|}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ \sin\varphi&=\frac{b}{|z|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ \varphi=\frac{\pi}{3},$$

pak $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Příklad 5. Vypočtěte $z_1\cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2},\ z_1^2$ pro $=2\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$, $=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$.

Řešení:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= |z_1||z_2|\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)= \\ &= 2\cdot 2\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi+\frac{11}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi+\frac{11}{6}\pi\right)\right)=4\left(\cos\frac{19}{12}\pi+i\sin\frac{19}{12}\pi\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)= \\
&= \frac{2}{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{11}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi-\frac{11}{6}\pi\right)\right)=1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right), \\
z_1^2 &= |z_1|^2\cdot\left(\cos 2\varphi_1+i\sin 2\varphi_1\right)=4\left(\cos\frac{7}{2}\pi+i\sin\frac{7}{2}\pi\right)=4\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right).
\end{aligned}$$

NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

6. Vypočtěte $S=z_1+z_2,\ R=z_1-z_2,\ N=z_1\cdot z_2$:

a) $z_1=3+2i,\ z_2=-1+4i$, $[S=2+6i,\ R=4-2i,\ N=-11+10i]$,

b) $z_1=i,\ z_2=3$, $[S=3+i,\ R=-3+i,\ N=3i]$,

c) $z_1=-2-3i,\ z_2=-2+3i$, $[S=-4,\ R=-6i,\ N=13]$,

d) $z_1=4+2i,\ z_2=2i$, $[S=4+4i,\ R=4,\ N=-4+8i]$,

e) $z_1=-5i,\ z_2=1+i$. $[S=1-4i,\ R=-1-6i,\ N=5-5i]$.

7. Určete reálnou a imaginární složku komplexního čísla:

a) $z=i^2+i^4+i^6+i^8$, $[Re\,z=Im\,z=0]$,

b) $z=4-i^4+3i^5-4i^7+i^8+2i^9-5i^{13}$. $[Re\,z=4,\ Im\,z=4]$.

8. Určete velikost komplexního čísla z:

a) $z=z_1+z_2,\ z_1=3+2i,\ z_2=4-i$, $[5\sqrt{2}]$,

b) $z=i^2+i^3+i^4+i^5$, $[0]$.

9. Vypočtěte:

a) $z=\dfrac{-2-i}{1+i}$, $[z=\dfrac{-3}{2}+\dfrac{1}{2}i]$,

b) $z=\dfrac{1-3i}{2+i}+\dfrac{1+3i}{2-i}$, $[z=-\dfrac{2}{5}]$.

10. Vyjádřete daná komplexní čísla

a) v goniometrickém tvaru:

1) $z=1+i$, $[z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{1}{4}\pi+i\sin\frac{1}{4}\pi\right)]$,

2) $z=-i$, $[z=1\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)]$,

3) $z=3\sqrt{3}-3i$, $[z=6\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)]$,

b) v algebraickém tvaru:

1) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $[z=\sqrt{3}+i]$,

2) $z = \frac{1}{2}(\cos 0 + i \sin 0)$, [$z = \dfrac{1}{2}$],

3) $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, [$z = -\sqrt{2}i$].

11. Vypočtěte $z_1^2,\ z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2}$ pro

a) $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3},\ z_2 = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$,

[$z_1^2 = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi,\ z_1 \cdot z_2 = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{z_1}{z_2} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$],

b) $z_1 = \cos\dfrac{5}{3}\pi + i\sin\dfrac{5}{3}\pi,\ z_2 = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$,

[$z_1^2 = \cos\dfrac{4}{3}\pi + i\sin\dfrac{4}{3}\pi,\ z_1 \cdot z_2 = 2\cos 0 + i\sin 0,\ \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi + i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$].