KVADRATICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

Kvadratická rovnice:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{pro } a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}\ \wedge\ a \neq 0.$$

Kořeny kvadratické rovnice:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminant: výraz $D = b^2 - 4ac$,

$$\begin{array}{lll} \text{pokud} & D > 0 & \Rightarrow \text{dva reálné různé kořeny,} \\ & D = 0 & \Rightarrow \text{dvojnásobný kořen,} \\ & D < 0 & \Rightarrow \text{dva komplexně sdružené kořeny.} \end{array}$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
kvadratická funkce: $y = ax^2 + bx + c$, grafem je parabola

Příklad 1. Řešte kvadratickou rovnici: $x^2 - 2x + 3 = 0$.

Řešení:

$$x_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i$$

Rovnice má dva komplexně sdružené kořeny.

Příklad 2. Jak vypadá kvadratická rovnice s reálnými koeficienty, je-li jeden kořen $x_1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}i$?

Řešení:
Dosadíme do vyjádření $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ např. $a = 1$. Poněvadž kvadratická rovnice má komplexní kořen, má pak také kořen komplexně sdružený $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \left(x - \left(\sqrt{3} - i\sqrt{2}\right)\right) \cdot \left(x - \left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)\right) = 0, \quad \text{dále upravíme:} \\ \left((x - \sqrt{3}) + i\sqrt{2}\right) \cdot \left((x - \sqrt{3}) - i\sqrt{2}\right) = 0 \end{array}$$

a pak využijeme známého vzorce $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ a dostaneme

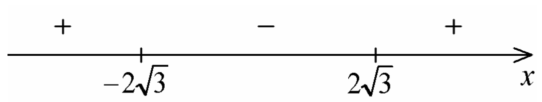
$$\begin{array}{l} \left(x - \sqrt{3}\right)^2 - i^2\left(\sqrt{2}\right)^2 = 0, \\ x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 + 2 = 0, \\ x^2 - 2x\sqrt{3} + 5 = 0. \end{array}$$

Příklad 3. Pro která m má rovnice $(4 - m)\,x^2 - 4x + 4 + m = 0$ komplexně sdružené kořeny?

Řešení: Pro $D < 0$ má rovnice komplexně sdružené kořeny, tedy pro $b^2 - 4ac < 0\ \Rightarrow$

$$\begin{array}{rcl} (-4)^2 - 4(4 - m)(4 + m) & < & 0 \\ 16 - 4(16 - m^2) & < & 0 \\ 16 - 4 \cdot 16 + 4m^2 & < & 0 \\ m^2 - 12 & < & 0 \\ (m - 2\sqrt{3})(m + 2\sqrt{3}) & < & 0 \end{array}$$

což je řešení kvadratické nerovnice, které hledáme pomocí nulových bodů výrazu a znaménka:

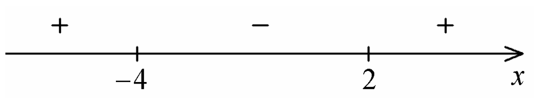


řešení je pak $m \in (-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.

Příklad 4. V oboru reálných čísel řešte nerovnici $16 - 4x - 2x^2 \geq 0$.

Řešení:
Při řešení kvadratické nerovnice nejdeme kořeny odpovídající kvadratické rovnice v $\mathbb{R}$, rozložíme na kořenové činitele a určíme znaménko součinu.

$$\begin{array}{rcll} -2(x^2+2x-8) & \geq & 0/:(-2) & \\ x^2+2x-8 & \leq & 0 & \text{(pozor na změnu znaménka!)} \\ & & & \text{najdeme kořeny a rozložíme} \\ (x+4)(x-2) & \leq & 0 & \text{a určíme znaménko:} \end{array}$$



$\Rightarrow$ řešení je $x \in \langle -4, 2 \rangle$.

NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

5. Najděte kořeny kvadratické rovnice:

a) $9x^2 + 18x - 32 = 0$, $[x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{41}}{3}]$,

b) $x^2 + x - 12 = 0$, $[x_1 = 3,\ x_2 = -4]$,

c) $x^2 + 4 = 0$, $[x_{1,2} = \pm 2i]$,

d) $x^2 - 6x + 13 = 0$, $[x_{1,2} = 3 \pm 2i]$,

e) $3x^2 - 7x = 0$, $[x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{7}{3}]$.

6. Pro která m má kvadratická rovnice

a) $mx^2 + 4x - 2 = 0$ komplexně sdružené kořeny, $[m < -2]$,

b) $x^2 + mx + 9 = 0$ reálné kořeny, $[m \in (-\infty, -6\rangle \cup \langle 6, \infty)]$,

c) $3x^2 - mx - 10m^2 = 0$ dvojnásobný kořen, $[m = 0]$,

d) $x^2 + (m-4)x + 13 - 2m = 0$ dvojnásobný kořen, $[m_1 = 6,\ m_2 = -6]$,

e) $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ komplexně sdružené kořeny, [m neexistuje].

7. Najděte řešení nerovnic:

a) $x^2 - 9x \geq 0$, $[x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 9, \infty)]$,

b) $4x - 16x^2 \geq 0$, $[x \in \langle 0, \dfrac{1}{4}\rangle]$,

c) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$, $[x = 2]$,

d) $x^2 + 4x + 4 > 0$, $[x \in \mathbb{R}]$,

e) $2x^2 - 3x + 10 \leq 0$, [řešení neexistuje].