DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$ ... derivace n-tého řádu

$\Downarrow$

$f''(x) = [f'(x)]'$ ... derivace 2. řádu – získáme zderivováním derivace 1. řádu

$f'''(x) = [f''(x)]'$ ... derivace 3. řádu – získáme zderivováním derivace 2. řádu

$\vdots$

atd.

Pozn.: Od 4. řádu je lepší značit derivace:
$f^{(4)}(x)$ – derivace 4. řádu
$f^{(5)}(x)$ – derivace 5. řádu
atd.

Př.: Určete derivace 1., 2. a 3. řádu. Výsledky upravte.

1) $f(x) = x \cdot (\ln x - 1)$ → derivace součinu fcí

$f'(x) = \ln x - 1 + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \underline{\underline{\ln x}}$

$f''(x) = \underline{\underline{\frac{1}{x}}} = x^{-1}$

$f'''(x) = -x^{-2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$

2) $f(x) = \frac{x-1}{3x^2}$ → derivace podílu fcí

$f'(x) = \frac{3x^2 - (x-1)\cdot 6x}{9x^4} = \frac{3x(x-2x+2)}{9x^4} = \underline{\underline{\frac{2-x}{3x^3}}}$

$f''(x) = \frac{-3x^3 - (2-x)\cdot 9x^2}{9x^6} = \frac{3x^2(-x-6+3x)}{9x^6} = \underline{\underline{\frac{2x-6}{3x^4}}}$

$f'''(x) = \frac{2\cdot 3x^4 - (2x-6)\cdot 12x^3}{9x^8} = \frac{3x^3(2x-8x+24)}{9x^8} = \frac{24-6x}{3x^5} = \underline{\underline{\frac{8-2x}{x^5}}}$

Pozn.: Při hledání derivací vyšších řádů je třeba výsledek předchozí derivace vždy upravit na co nejjednodušší tvar.

3) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{1+\sin x}$ → derivace složené fce (vnitřní složka je podíl fcí)

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^2} \cdot \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(1+\sin x)^2 + \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}} \cdot \frac{-(\sin x + \overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1})}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1+\sin x}{1+2\sin x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}} =$$

$$= -\frac{1+\sin x}{2+2\sin x} = -\frac{1+\sin x}{2(1+\sin x)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$f''(x) = f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

4) $f(x) = \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ → derivace složené fce (vnitřní složka je podíl fcí)

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \cdot \frac{-\cos x \cdot (1+\sin x) - (1-\sin x) \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{-\cos x \cdot (1+\sin x + 1 - \sin x)}{(1-\sin x) \cdot (1+\sin x)} = -\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x} = -\frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{-\frac{2}{\cos x}}} = -2\cos^{-1} x$$

$$f''(x) = -2 \cdot (-1) \cos^{-2} x \cdot (-\sin x) = \underline{\underline{-\frac{2\sin x}{\cos^2 x}}}$$ → derivace podílu fcí

$$f'''(x) = -\frac{2\cos x \cdot \cos^2 x - 2\sin x \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} =$$

$$= -\frac{2\cos x \cdot (\overbrace{\cos^2 x + 2\sin^2 x}^{*})}{\cos^4 x} = \underline{\underline{-\frac{2(1+\sin^2 x)}{\cos^3 x}}}$$

$$* \quad \cos^2 x + 2\sin^2 x = \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1} + \sin^2 x = 1 + \sin^2 x$$