KVADRATICKÁ (NE)ROVNICE

- Kvadratická rovnice v $\mathbb{R}$:

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$

x_1, x_2 ... kořeny
D .... diskriminant

$D > 0$ ... 2 různé reálné kořeny
$D = 0$ ... 1 dvojnásobný reálný kořen
$D < 0$ ... rovnice nemá řešení

Viètovy vzorce: $x^2 + px + q = 0$ → $x_1 + x_2 = -p$
↳ kořeny x_1, x_2 $\qquad x_1 \cdot x_2 = q$

Poznámka: Komplexní číslo $z = a + bi$, kde
- $a, b \in \mathbb{R}$
- i ... imaginární jednotka, $i^2 = -1$

- Kvadratická rovnice v $\mathbb{C}$:

- v komplexním oboru má kvadratická rce vždy řešení

$D = b^2 - 4ac < 0$ → $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$ ... 2 komplexně sdružené kořeny

Pro $D \geq 0$ stejné jako v $\mathbb{R}$.

- Kvadratická funkce:

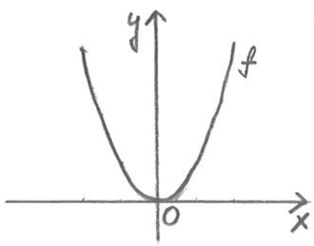
$f: y = ax^2 + bx + c$

graf: parabola ... $a > 0$

$a < 0$

($a = 0$ → $f: y = bx + c$ ... lineární funkce)

př: $f: y = x^2$



Př.: Řešte v $\mathbb{C}$:

1) $2x^2 - 3x - 5 = 0$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$

$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 7}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} \\ x_2 = -1 \end{cases}$

2) $x^2 + 2x - 15 = 0$ ... řešíme pomocí Viètových vzorců:

$(x-3) \cdot (x+5) = 0$ ⊛ – hledáme taková dvě čísla, aby

$x - 3 = 0 \quad \vee \quad x + 5 = 0$ * jejich součin byl −15 a jejich

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -5$ součet 2

→ $15 = -3 \cdot 5$, $2 = -3 + 5$

⊛ Rovnice v součinovém tvaru

* Součin je roven nule, je-li alespoň jeden z činitelů roven nule

3) $x^2 + 2x = 0$ ... Neúplná kvadratická rce

$x(x+2) = 0$ – řešíme převedením na součinový tvar

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$ pomocí vytknutí x

$x_2 = -2$

4) $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$ ... odmocníme

$|x| = 3$ → $|x - 0| = 3$

$x_{12} = \pm 3$

Řešení použitá v příkladech 2, 3, 4 jsou jednodušší než řešení pomocí diskriminantu.

5) $x^2 - 4x + 13 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$

$x_{12} = \frac{-(-4) \pm i\sqrt{|-36|}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6i}{2} = \frac{2(2 \pm 3i)}{2} = 2 \pm 3i$

6) $x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4$

$x = \pm i\sqrt{|-4|}$

$x_{12} = \pm 2i$

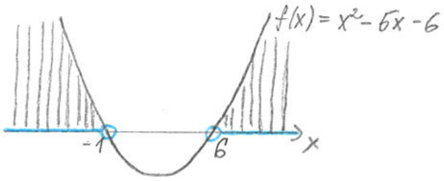
Př: Řešte v $\mathbb{R}$:

1) $x^2 - 5x - 6 > 0$

$\hookrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$ ... hledáme body, ve kterých graf fce $f(x) = x^2 - 5x - 6$ protíná osu x

$(x+1)(x-6) = 0$

$x_1 = -1,\ x_2 = 6$



řešením jsou taková čísla x, pro která je $f(x) > 0$ (graf fce f je nad osou x)

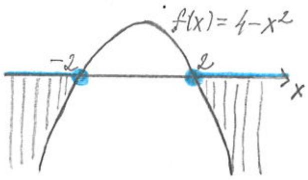
$K = (-\infty, -1) \cup (6, \infty)$

2) $4 - x^2 \leq 0$

$\hookrightarrow 4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$ ... průsečíky grafu fce $f(x) = 4 - x^2$ s osou x



řešením jsou taková čísla x, pro která je $f(x) \leq 0$ (graf fce f je pod osou x)

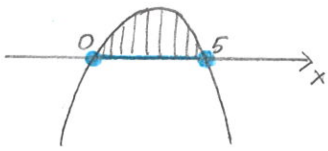
$K = (-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$

3) $5x - x^2 \geq 0$

$\hookrightarrow 5x - x^2 = 0$

$x(5-x) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 5$



$K = \langle 0, 5\rangle$