L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- využíváme pro limity typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\text{„cokoliv"}}{\pm\infty}$

Př.: Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočtěte limity:

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

1. Za x dosadíme 0 → dostaneme $\frac{0}{0}$ ⇒ ⇒ můžeme použít L'Hospitalovo pravidlo

2. Použijeme L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{(e^x-1)'}{x'}} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}$$

Derivujeme zvlášť čitatele a zvlášť jmenovatele zlomku.

2) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{1} = \underline{\underline{-1}}$$

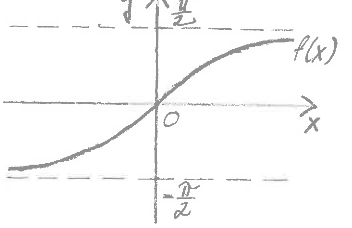
3) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2x}{3x^2-4x+2} = \frac{2}{3\cdot 1^2-4\cdot 1+2} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$

4) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^2}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = \underline{\underline{0}}$$

5) $$\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{1-x^2}{1+3x} \overset{*}{=} \left[\overbrace{\operatorname{arctg}(-\infty)}^{⊛}\right] = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}}}$$

$$* \lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{1+3x} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{3} = -\frac{2}{3}\infty = -\infty$$

⊛ Určíme z grafu fce $f(x) = \operatorname{arctg} x$:



Někdy je třeba použít L'Hospitalovo pravidlo opakovaně:

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\frac{1}{\cos^2 x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{-(-2)\cos^{-3}x\cdot(-\sin x)} =$

$\frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2}x$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2}\cos^3 x\right) = -\frac{1}{2}\cdot 1^3 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

$(\sin 0 = 0, \quad \operatorname{tg} 0 = 0, \quad \cos 0 = 1)$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{x^2}}{1-\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^{x^2}\cdot 2x}{\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x - e^{x^2}\cdot 2}{\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2e^{x^2}\cdot(2x^2+1)}{\cos x} = \dfrac{-2e^0\cdot(0+1)}{\cos 0} = \dfrac{-2\cdot 1\cdot 1}{1} = \underline{\underline{-2}}$

Pozn.: Než použijeme L'Hospitalovo pravidlo, je vždy třeba ověřit, že se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}$ a tedy že můžeme toto pravidlo použít.