DETERMINANTY

Př.: Určete algebraické doplňky k prvkům a_{12}, a_{31}, a_{23} v determinantu $|A|$, je-li:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$$

Pozn.: Subdeterminanty 2. řádu spočítáme křížovým pravidlem.

- $a_{12} = -2 \Rightarrow \bar{A}_{12} = \underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -(1\cdot 6 - 2\cdot(-2)) = -(6+4) = -10$
- $a_{31} = -2 \Rightarrow \bar{A}_{31} = \underbrace{(-1)^{3+1}}_{1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot 2 - (-4)\cdot 3 = -4+12 = 8$
- $a_{23} = 2 \Rightarrow \bar{A}_{23} = \underbrace{(-1)^{2+3}}_{-1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -(3\cdot(-4) - (-2)\cdot(-2)) = -(-12-4) = 16$

Př.: Pomocí Laplaceova rozvoje vypočtěte determinanty:

1) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Pro rozvoj determinantu můžeme zvolit libovolný řádek nebo sloupec. Ukážeme např. rozvoj podle 1. sloupce.

$$|A| = 1\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}}_{1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot\underbrace{(-1)^{3+1}}_{1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(3\cdot 2 - 1(-2)) + 2\cdot((-3)\cdot 2 - 2\cdot(-2)) + 3\cdot(-3\cdot 1 - 2\cdot 3) =$$

$$= (6+2) + 2(-6+4) + 3(-3-6) = 8 + 2\cdot(-2) + 3\cdot(-9) = 8-4-27 = -23$$

2) $$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -5 & 1 \\ a & b & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + b\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

K výpočtu zvolíme rozvoj podle 3. řádku.

$$= a\left(-1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + 0\right) -$$

$=0$ … jeden řádek je násobkem druhého

$$-b\cdot\left(-1(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\right) =$$

$$= a\cdot[-(2-5)] - b[-(2-5) - (-2+4)] = 3a - b$$

Pomocí Laplaceova rozvoje snižujeme řád determinantů, dokud nedostaneme determinanty 2. řádu, které spočítáme křížovým pravidlem.

Pozn.: Z předchozích příkladů je vidět, že je výhodné k rozvoji determinantu využít řádek nebo sloupec, ve kterém je co nejvíc nul (a tedy co nejvíc členů Laplaceova rozvoje determinantu je nulových).

3) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{4+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -4\cdot 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= 8\cdot 3(-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} = 24\cdot(-9+12) = 24\cdot 3 = \underline{72}$$

Výpočet determinantu pomocí Laplaceova rozvoje je vhodný, obsahuje-li determinant hodně nul.
V případě, že determinant žádné nuly neobsahuje (nebo jen velmi málo), bychom ale např. u determinantu 5. řádu užitím rozvoje dostali 5 determinantů 4. řádu, z nich $5\cdot 4 = 20$ determinantů 3. řádu a z nich $20\cdot 3 = 60$ determinantů 2. řádu.
Takový výpočet by byl značně zdlouhavý. Proto je výhodnější tyto determinanty převést pomocí úprav na schodovitý tvar.

- **Úpravy determinantů:**

  - které nemění hodnotu determinantu:

    Ú1. Výměna sloupců za řádky (transponování).

    Ú2. Přičtení k-násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci).

  - které změní hodnotu determinantu:

    Ú3. Záměna dvou řádků (sloupců) změní znaménko determinantu.
    Nemůžeme tedy libovolně přeházet řádky (sloupce) (tak jako u matice), ale můžeme mezi sebou vyměnit vždy jen dva řádky (sloupce) a zároveň determinant vynásobit číslem −1, aby jeho hodnota zůstala stejná.

    Ú4. Vynásobíme-li řádek (sloupec) číslem k, je hodnota nově vzniklého determinantu rovna k-násobku hodnoty původního determinantu.
    Násobíme-li řádek (sloupec) číslem k, musíme zároveň číslem k celý determinant vydělit, aby se jeho hodnota nezměnila.

! • Je-li determinant ve schodovitém tvaru, pak je jeho hodnota rovna součinu prvků na hlavní diagonále.

• Determinant je roven nule pokud:

- obsahuje nulový řádek (sloupec);
- obsahuje dva stejné řádky (sloupce);
- jeden řádek (sloupec) je roven k-násobku jiného řádku (sloupce).

Př.: Vypočtěte determinanty převedením na schodovitý tvar.

1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 21 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1\cdot(-3) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot6 = 6$$

Použili jsme jen úpravu U2, která nemění hodnotu determinantu.

2) $$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1\cdot(-2) & 1\cdot(-1) \\ & \\ & \end{matrix}}_{U2.} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

↳ 3. řádek je násobkem 2. řádku ⇒

3) $$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{2\cdot2\cdot2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1\cdot(-2) & 1\cdot(-3) \\ & \\ & \end{matrix}}_{U1.} =$$

Z 1., 2. i 3. řádku jsme vytkli číslo 2 - aplikace pravidla U4.

Úprava U3.

$$= -8\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -7 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1\cdot(-7) \\ 1\cdot 5 \end{matrix} = -8\cdot\frac{1}{5}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = -8\cdot\frac{1}{5}\cdot 1\cdot(-5)\cdot(-18) = -144$$

Úpravy U2. a U4.

4) $$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -8 & -1 \\ 4 & 1 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1\cdot(-3) & 1\cdot(-2) \\ 1\cdot 2 & \\ & \end{matrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-7)\cdot(-1) = 7$$

U4.

5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \; 1\cdot(-3) \;\; 1\cdot(-2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)\cdot 3\cdot 3 = \underline{\underline{9}}$

Úpravy determinantu a Laplaceův rozvoj můžeme také kombinovat. Pomocí úprav vytvoříme v některém řádku (sloupci) determinantu, až na jeden prvek, samé nuly a poté pomocí Laplaceova rozvoje snížíme řád determinantu.

Př.: Vypočtěte determinanty:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 10 \\ -2 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 10 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 11 \end{vmatrix} \; 1\cdot(-2) = 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 10 \\ -3 & -2 & 0 & -21 \\ 3 & 5 & 0 & 21 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -3 & -2 & -21 \\ 3 & 5 & 21 \end{vmatrix} =$

Z 1. sloupce jsme vytkli číslo 2.

$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 21 \end{vmatrix} = -2\cdot 3\cdot(-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 21 \end{vmatrix} = -6\,(21-24) = -6\cdot(-3) = \underline{\underline{18}}$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \; 1\cdot(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \; 1\cdot(-1) =$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+4}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(1-2) =$

$= 2\cdot(-1) = \underline{\underline{-2}}$