

HODNOST MATICE

Př.: Určete hodnotu matice A . Rozhodněte, zda je matice A regulární nebo singularní. V případě, že je matice A singularní, určete její defekt.

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \\ -7 & -10 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 \end{smallmatrix}]{+} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot (-2) \end{smallmatrix}]{+} \overset{\textcircled{1}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & -13 & -12 \\ 0 & 13 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 \end{smallmatrix}]{+} \overset{\textcircled{2}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 0 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pomocí elementárních úprav přivedeme matici A na matici ve schodovitém tvaru:

- ① • První řádek opíšeme (ponecháme beze změny).
- K 3-násobku druhého řádku přičteme 2-násobek prvního řádku.
- K (-2)-násobku třetího řádku přičteme 7-násobek druhého řádku.
- ② • První a druhý řádek opíšeme (ponecháme beze změny).
- K třetímu řádku přičteme druhý řádek.

→ Zastavíme matici ve schodovitém tvaru.
(„Schody“ jsou vyznačeny žlutě.)

Hodnota matice = počet nenulových řádků \Rightarrow $h(A) = 2$

Řád matice A : $n = 3$

$h(A) < n \Rightarrow$ Matice A je singularní.

Defekt: $n - h(A) = 3 - 2 = \underline{1}$

$$2) A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-3) \end{smallmatrix}]{+} \overset{\textcircled{1}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 \end{smallmatrix}]{+} \overset{\textcircled{2}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 \end{smallmatrix}]{+} \overset{\textcircled{3}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

- ① • Zaměníme první a druhý řádek; třetí řádek ponecháme beze změny.
- ② • První a druhý řádek ponecháme beze změny.
- K (-3)-násobku třetího řádku přičteme 2-násobek prvního řádku.
- ③ • První a druhý řádek ponecháme beze změny.
- K třetímu řádku přičteme 5-násobek druhého řádku.

$h(A) = 3$

$n = 3$; $h(A) = n \Rightarrow$ Matice A je regulární.

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & -8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -9 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & -8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pozn.: Při úpravě matice na schodovitý tvar je výhodné, když první první řádek začíná číslem 1.

$$\underline{h(A) = 3}; \quad n = 4; \quad h(A) < n \Rightarrow \underline{\text{Matice } A \text{ je singulární.}}$$

$$n - h(A) = 4 - 3 = \underline{1}$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & -1 \\ 0 & -4 & -10 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{h(A) = 2}; \quad n = 4; \quad h(A) < n \Rightarrow \underline{\text{Matice } A \text{ je singulární.}}$$

$$n - h(A) = 4 - 2 = \underline{2}$$