MATICOVÉ ROVNICE

Řešení maticové rovnice o jedné neznámé matici X má dvě části:

1. Z maticové rovnice osamostatníme neznámou matici X.

   - Matice neumíme dělit! → Místo toho násobíme obě strany rovnice maticí inverzní a využíváme vztahy:

$$A \cdot A^{-1} = E, \quad A^{-1} \cdot A = E, \quad A \cdot E = A, \quad E \cdot A = A.$$

   - Protože násobení matic není komutativní, rozlišujeme násobení zleva a násobení zprava.

2. Neznámou matici X vypočítáme.

Př.: Řešte maticové rovnice pro neznámou matici X.

1) $2X + A - B = X - 2C$; $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Matice převádíme z jedné strany rovnice na druhou stranu rovnice stejně, jako u „normální" rovnice.

$$X = B - A - 2C$$

2. $$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1-2\cdot 1 & 2-(-1)-2\cdot 0 \\ 5-3-2\cdot 0 & 1-(-2)-2\cdot 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

2) $A^2 \cdot X + B = C$; $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$

1. $$A^2 \cdot X = C - B \qquad / \cdot (A^2)^{-1} \text{ zleva}$$

$$\underbrace{\underbrace{(A^2)^{-1} \cdot A^2}_{E} \cdot X}_{X} = (A^2)^{-1} \cdot (C - B)$$

$$X = (A^2)^{-1} \cdot (C - B)$$

2. Pozn.: Matici A^2 vypočítáme jako součin matic $A \cdot A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 5 & 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) \\ 5\cdot 2 + (-2)\cdot 5 & 5\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^2)^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-7 & -2-(-5) \\ 5-4 & -7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}}}$$

3) $A \cdot X \cdot B = C$; $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

1. $$A \cdot X \cdot B = C \qquad / \cdot A^{-1} \text{ zleva}$$
$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E} \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$$
$$X \cdot B = A^{-1} \cdot C \qquad / \cdot B^{-1} \text{ zprava}$$
$$X \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{E} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$
$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$ ... výpočet: $X = (A^{-1} \cdot C) \cdot B^{-1}$ nebo $X = A^{-1} \cdot (C \cdot B^{-1})$

2. A^{-1}: $$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot 5 \\ /\cdot(-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) /:3 \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

B^{-1}: $$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot 7 \\ /\cdot(-5) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right) /\cdot(-3) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & -20 & 15 \\ 0 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} /:5 \\ /:2 \end{array} \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}\right]}_{\begin{pmatrix} 2\cdot 14 + (-1)\cdot 9 & 2\cdot 16 + (-1)\cdot 10 \\ 5\cdot 14 + (-3)\cdot 9 & 5\cdot 16 + (-3)\cdot 10 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 19\cdot(-8) + 22\cdot 7 & 19\cdot 6 + 22\cdot(-5) \\ 43\cdot(-8) + 50\cdot 7 & 43\cdot 6 + 50\cdot(-5) \end{pmatrix}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}}$$

4) $X\cdot A+2B=C$; $A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-2&0&1\\1&-3&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0&-1\\-3&2&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-4&0&9\end{pmatrix}$

1. $X\cdot A+2B=C$

$$X\cdot A = C-2B \qquad /\cdot A^{-1} \text{ zprava}$$

$$X\cdot\underbrace{A\cdot A^{-1}}_{E}=(C-2B)\cdot A^{-1}$$

$$X=(C-2B)\cdot A^{-1}$$

2. A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-1&0&1&0&0\\-2&0&1&0&1&0\\1&-3&-1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}/\cdot(-2)\\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-1&0&1&0&0\\0&2&1&-2&1&0\\0&-4&-1&1&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}/\cdot(-1)\\ /\cdot 2\\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-1&0&0\\0&2&1&-2&1&0\\0&0&1&-3&2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ /\cdot(-1)\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-1&1&0\\0&2&0&1&-1&-1\\0&0&1&-3&2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}/\cdot(-2)\\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&0&3&-1&-1\\0&2&0&1&-1&-1\\0&0&1&-3&2&1\end{array}\right)\begin{array}{l}/:(-2)\\ /:2\\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-3&2&1\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-3&2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-1&-1\\-6&4&2\end{pmatrix}$$

$$C-2B=\begin{pmatrix}3&1&-2\\-4&0&9\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2&0&-1\\-3&2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2\cdot2&1-2\cdot0&-2-2\cdot(-1)\\-4-2\cdot(-3)&0-2\cdot2&9-2\cdot4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-4&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-4&1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-1&-1\\-6&4&2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&-4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-1&-1\\-6&4&2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\cdot(-3)+1\cdot1+0\cdot(-6)&-1\cdot1+1\cdot(-1)+0\cdot4&-1\cdot1+1\cdot(-1)+0\cdot2\\2\cdot(-3)+(-4)\cdot1+1\cdot(-6)&2\cdot1+(-4)\cdot(-1)+1\cdot4&2\cdot1+(-4)\cdot(-1)+1\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-16&10&8\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-8&5&4\end{pmatrix}}}$$