PRŮBĚH FUNKCE

Př: Je dána funkce $f(x)$. Určete:

1. intervaly monotonie (tj: kdy je funkce rostoucí a kdy klesající) a extrémy funkce;
2. kdy je funkce konvexní a kdy konkávní a inflexní body.

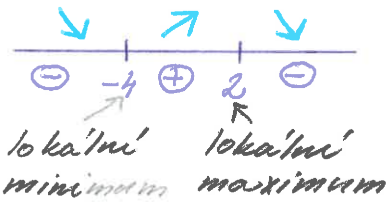
$$f(x) = 5 + 4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

1. $f'(x) = 4 - \frac{2x}{2} - \frac{3x^2}{6} = 4 - x - \frac{1}{2}x^2$

Extrémy: $f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - x - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad / \cdot (-2)$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x-2)(x+4) = 0$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = -4$$

Určíme znaménko $f'(x)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ fce je rostoucí ↗
$f'(x) < 0 \Rightarrow$ fce je klesající ↘



$f'(0) = 4 > 0$

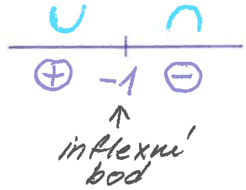
lokální minimum: $x = -4$
lokální maximum: $x = 2$ } *

* lokální extrémy

2. $f''(x) = -1 - \frac{2x}{2} = -1 - x$

Inflexní body: $f''(x) = 0 \Rightarrow -1 - x = 0$
$$x = -1$$

Určíme znaménko $f''(x)$: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ fce je konvexní ∪
$f''(x) < 0 \Rightarrow$ fce je konkávní ∩



$f''(0) = -1 < 0$

inflexní bod: $x = -1$

Př.: Je dána funkce $f(x)$. Určete:
1. definiční obor;
2. první a druhou derivaci; výsledky upravte;
3. intervaly monotonie, lokální extrémy (pokud existují) a jejich funkční hodnoty;
4. konvexnost, konkávnost, inflexní body (pokud existují) a jejich funkční hodnoty.

1) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$

1. $1+x \neq 0$

$x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad \underline{D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}}$

2. $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2}} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{-2}{1+2x+x^2+1-2x+x^2} = -\frac{2}{2+2x^2} = \underline{-\frac{1}{1+x^2}} = -(1+x^2)^{-1}$$

$$f''(x) = -(-1)(1+x^2)^{-2}\cdot 2x = \underline{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}$$

$D(f) = D(f') = D(f'')$

3. $f'(x) < 0 \quad \forall \; x \in D(f') = D(f)$

$\searrow$ $\quad$ $\searrow$

$\ominus \quad -1 \quad \ominus$

fce $f(x)$ je klesající v celém $D(f)$

<u>Extrémy neexistují.</u>

4. $f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 0$

$x = 0 \quad \ldots \; f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\cap \quad \cap \quad \cup$

$\ominus \quad -1 \quad \ominus \quad 0 \quad \oplus$

$x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

$x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$

<u>Inflexní bod: $[0, \frac{\pi}{4}]$</u>

2) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

1. $D(f)$: $\frac{1+x}{1-x} > 0 \longrightarrow$ $-\quad+\quad-$; $-1 \quad 1$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{D(f) = (-1, 1)}}$

2. $f'(x) = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1\cdot(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \underline{\underline{\frac{2}{1-x^2}}} = 2(1-x^2)^{-1}$

$f''(x) = 2\cdot(-1)\cdot(1-x^2)^{-2}\cdot(-2x) = \underline{\underline{\frac{4x}{(1-x^2)^2}}}$

$D(f) = D(f') = D(f'')$

3. $f'(x) \neq 0 \quad \forall \quad x \in D(f')$

$\nearrow$; $-1 \quad \oplus \quad 1$

$f'(0) = 2 > 0$

<u>Extrémy neexistují!</u>

4. $f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 4x = 0$
$x = 0 \quad \ldots \quad f(0) = \ln 1 = 0$

$\cap \quad \cup$; $-1 \quad \ominus \quad 0 \quad \oplus \quad 1$

$x \in (0,1) \Rightarrow f''(x) > 0$
$x \in (-1,0) \Rightarrow f''(x) < 0$

<u>Inflexní bod : [0, 0]</u>

Př.: Najděte asymptoty grafu funkce $f(x)$:

1) $f(x)=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$

$D(f): x+1\neq 0$
$x\neq -1 \quad \Rightarrow \quad D(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

- asymptoty bez směrnice: $x=x_0$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\left[\frac{-1}{0^+}\right]=-\infty$$
$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\left[\frac{-1}{0^+}\right]=-\infty$$
$$\Rightarrow \quad x=-1$$

- asymptoty se směrnicí: $y=ax+b, \quad a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2\underbrace{(x+1)^2}_{x^2+2x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(2+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{2(x^2+2x+1)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}(-2-\frac{1}{x})}{\cancel{x^2}(2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$y=\frac{1}{2}x-1$$

2) $f(x)=\ln\frac{2x}{x-1}$

$D(f): \frac{2x}{x-1}>0 \rightarrow$ + 0 − 1 + $\Rightarrow D(f)=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

- asymptoty bez směrnice: $x=x_0$

$$\lim_{x\to 0^-}\ln\frac{2x}{x-1}=[\ln 0^+]=-\infty$$
$$\hookrightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{x-1}=\left[\frac{0^-}{-1}\right]=0^+$$
$$x=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\ln\frac{2x}{x-1}=[\ln\infty]=\infty$$
$$\hookrightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{x-1}=\left[\frac{2}{0^+}\right]=\infty$$
$$x=1$$

- asymptoty se směrnicí: $y=ax+b$

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\frac{2x}{x-1}}{x}=\left[\frac{\ln 2}{\pm\infty}\right]=0$$
$$\hookrightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-1}=\left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right]\overset{LP}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1}=2$$
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\ln\frac{2x}{x-1}=\ln 2$$
$$\Rightarrow \quad y=\ln 2$$