VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

1. Vlastní čísla : $|A-\lambda E| = 0$ (1)

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ … vlastní čísla matice A = kořeny rovnice (1)

2. Vlastní vektory : $(A-\lambda E)\cdot\vec{x} = \vec{o}$ (2)

- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ postupně dosadíme za λ do (2) → jednotlivým vlastním číslům určíme příslušné vlastní vektory $\vec{x}_i = (x_1, x_2)$, resp. $\vec{x}_i = (x_1, x_2, x_3)$.

- (2) je homogenní soustava lineárních algebraických rovnic, která má nekonečně mnoho řešení.

- Je-li $\vec{x}$ vlastní vektor matice A, pak $k\cdot\vec{x}$, $k \neq 0$ je rovněž vlastní vektor matice A.

Př.: Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice A.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

1. $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(-3-\lambda)+4 = -6-2\lambda+3\lambda+\lambda^2+4 =$

$= \lambda^2+\lambda-2 = (\lambda-1)(\lambda+2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 1}},\ \underline{\underline{\lambda_2 = -2}}$ … vlastní čísla

2. $\underline{\lambda_1 = 1}$: $(A-\lambda_1 E)\cdot\vec{x}_1 = \vec{o} \rightarrow \begin{pmatrix} 2-1 & 4 \\ -1 & -3-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} x_1+4x_2 \\ -x_1-4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{matrix} x_1+4x_2 = 0 \\ \cancel{-x_1-4x_2} = 0 \end{matrix}}_{*} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -4x_2 = -4t \\ x_2 = t \end{matrix} \rightarrow$

* druhá rovnice je −1 násobek první rovnice ⇒ druhou rovnici můžeme vynechat (řešení se nezmění)

$\rightarrow \vec{x}_1 = (-4t, t)^T \rightarrow \underline{\underline{\vec{x}_1 = t\cdot(-4, 1)^T}},\ t \neq 0$

$\underline{\lambda_2 = -2}$: $(A-\lambda_2 E)\cdot\vec{x}_2 = \vec{o} \rightarrow \begin{pmatrix} 2-(-2) & 4 \\ -1 & -3-(-2) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 4x_1+4x_2 \\ -x_1-x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \cancel{4x_1+4x_2} = 0 \\ -x_1-x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = s \\ x_2 = -x_1 = -s \end{matrix} \rightarrow$

$\rightarrow \vec{x}_2 = (s, -s)^T \rightarrow \underline{\underline{\vec{x}_2 = s\cdot(1, -1)^T}},\ s \neq 0$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_{12} = 2}}$

2. $\underline{\lambda_{12} = 2}$: $(A - \lambda_{12} E) \cdot \vec{x} = \vec{o} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ \cancel{-x_1 - x_2 = 0} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -x_1 = -t \\ x_1 = t \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{x} = (t, -t)^T \rightarrow \underline{\underline{\vec{x} = t \cdot (1, -1)^T}}, \quad t \neq 0$$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot [(1-\lambda)^2 - 9] =$

$= (1-\lambda)(1-\lambda+3)(1-\lambda-3) = (1-\lambda)(4-\lambda)(-2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 1}}, \ \underline{\underline{\lambda_2 = 4}}, \ \underline{\underline{\lambda_3 = -2}}$

2. $\underline{\lambda_1 = 1}$: $(A - \lambda_1 E) \cdot \vec{x}_1 = \vec{o} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{matrix} 3x_3 = 0 \\ \cancel{2x_1 + 2x_3 = 0} \ * \\ 3x_1 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_2 = t \ ** \\ \Rightarrow x_1 = 0 \end{matrix} \rightarrow$$

* druhá rovnice je lineární kombinací první a třetí rovnice, můžeme ji tedy vynechat.

** pokud se některá z proměnných v soustavě vůbec nevyskytuje, automaticky ji volíme jako parametr.

$$\rightarrow \vec{x}_1 = (0, t, 0)^T \rightarrow \underline{\underline{\vec{x}_1 = t \cdot (0, 1, 0)^T}}, \quad t \neq 0$$

$\underline{\lambda_2 = 4}$: $(A-\lambda_2 E)\cdot\vec{x}_2 = \vec{o} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{aligned} -3x_1 \quad\quad + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ \cancel{3x_1 \quad\quad - 3x_3} &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow x_1 = x_3 = 3s \\ &\Rightarrow x_2 = \tfrac{1}{3}(2x_1 + 2x_3) = \tfrac{1}{3}(6s+6s) = 4s \\ &\quad\; x_3 = 3s \; * \end{aligned} \quad \rightarrow$$

* volíme parametr 3s, abychom se vyhnuli zlomku ve vyjádření proměnné x_2.

$\rightarrow \vec{x}_2 = (3s, 4s, 3s)^T \qquad \underline{\underline{\vec{x}_2 = s(3,4,3)^T}}, \quad s \neq 0$

$\lambda_3 = -2$: $(A-\lambda_3 E)\cdot\vec{x}_3 = \vec{o} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{aligned} 3x_1 \quad\quad + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ \cancel{3x_1 \quad\quad + 3x_3} &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow x_3 = -x_1 = -r \\ &\Rightarrow x_2 = \tfrac{1}{3}(-2x_1 - 2x_3) = \tfrac{1}{3}(-2r + 2r) = 0 \\ &\quad\; x_1 = r \end{aligned} \quad \rightarrow$$

$\rightarrow \vec{x}_3 = (r, 0, -r)^T \qquad \underline{\underline{\vec{x}_3 = r\cdot(1, 0, -1)^T}}, \quad r \neq 0$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 1) =$

$= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{12} = 1, \quad \lambda_3 = -1$

2. $\underline{\lambda_{12} = 1}$: $(A - \lambda_{12} E)\cdot\vec{x}_{12} = \vec{o} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{aligned} \cancel{0} &= \cancel{0} \\ \cancel{-x_2 + x_3} &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= x_2 = s \end{aligned} \quad \rightarrow$$

$\rightarrow \vec{x}_{12} = (t, s, s)^T \rightarrow \underline{\underline{\vec{x}_{12} = t(1,0,0)^T + s(0,1,1)^T}}, \quad |t| + |s| \neq 0$

$\underline{\lambda_3 = -1:}$ $\quad (A - \lambda_3 E)\cdot \vec{x}_3 = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad \begin{matrix} 2x_1 & & = 0 & \Rightarrow & x_1 = 0 \\ & x_2 + x_3 & = 0 & \Rightarrow & x_3 = -x_2 = -r \\ & \cancel{x_2 + x_3} & = 0 & & x_2 = r \end{matrix} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \vec{x}_3 = (0, r, -r)^T \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{x}_3 = r\cdot(0, 1, -1)^T}}, \quad r \neq 0$$