

# NUMERICKÉ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC – I. část (bisekce, regula falsi)

Hledáme kořen  $\hat{x}$  rovnice  $f(x) = 0$ .

**Věta:** Je-li funkce  $f$  spojitá na  $\langle a, b \rangle$  a  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , pak má funkce  $f$  na  $(a, b)$  alespoň jeden kořen.

## Postup:

- 1) Určíme dostatečně malý **výchozí interval**  $(a_0, b_0)$ , který obsahuje jediný kořen.
- 2) Výchozí interval postupně zmenšujeme (tj. konstruujeme posloupnost do sebe vnořených intervalů  $(a_0, b_0) \supset (a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \dots \supset (a_i, b_i) \supset (a_{i+1}, b_{i+1}) \supset \dots$  s vlastností  $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$ )  
→ v intervalu  $(a_i, b_i)$  vybereme  $x_{i+1}$  →
  - $f(x_{i+1}) = 0 \dots x_{i+1}$  je kořen
  - $f(x_{i+1}) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(a_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow a_{i+1} = a_i, & b_{i+1} = x_{i+1} \\ f(x_{i+1}) \cdot f(b_i) < 0 \Rightarrow a_{i+1} = x_{i+1}, & b_{i+1} = b_i \end{cases}$

**Ukončení:** Zadané malé kladné číslo  $\varepsilon$  a kritérium, kdy ukončit výpočet → rovnice vyřešena s chybou menší než  $\varepsilon$ .

## BISEKCE (METODA PŮLENÍ INTERVALU)

- $x_{i+1}$  je střed intervalu  $(a_i, b_i)$ , tj.

$$x_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}$$

- **Odhad chyby:**  $d_i = \frac{b_i - a_i}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}}$   
...  $i$  kroků metody půlení zmenší odhad chyby  $2^i$ -krát  
–  $d_i$  je polovina délky intervalu  $(a_i, b_i)$
- **Podmínka ukončení:**  $d_i < \varepsilon \Rightarrow \hat{x} = x_{i+1} \pm d_i$

## REGULA FALSI (METODA TĚTIV)

- $x_{i+1}$  z intervalu  $(a_i, b_i)$  je průsečík přímky procházející body  $[a_i, f(a_i)]$  a  $[b_i, f(b_i)]$  s osou  $x$ , tj.

$$x_{i+1} = \frac{a_i \cdot f(b_i) - b_i \cdot f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

- **Podmínka ukončení:**  $|f(x_{i+1})| < \varepsilon$

**Příklad:** Graficky odhadněte počet a polohu kořenů rovnice

a)  $x^2 - \cos x = 0$ ,

b)  $(x - 1)^3 - \sqrt{x + 2} = 0$ .

**Příklad:** Graficky odhadněte počet a polohu kořenů  $x + e^{-x} - 2 = 0$ . Aproximujte kladný kořen s chybou menší než  $\varepsilon = 0,01$ . (Zaokrouhlujte na 4 desetinná místa.)

**Bisekce:**

$i$	$a_i$	$b_i$	$x_{i+1}$	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_{i+1})$
0						
1				-0,2769	0,1353	-0,0762
2				-0,0762	0,1353	0,0284
3				-0,0762	0,0284	-0,0243
4				-0,0243	0,0284	0,0020
5				-0,0243	0,0020	-0,0111
6				-0,0111	0,0020	-0,0045

**Regula falsi:**

$i$	$a_i$	$b_i$	$x_{i+1}$	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_{i+1})$
0				-0,6321	0,1353	-0,0149
1				-0,0149	0,1353	-0,0002