Josef Čížek

Numerické metody

Bisekce (půlení intervalu) a Regula falsi

Příklad 1

$$f(x) = x * arctg(x) - 1$$

$$\varepsilon = 0{,}01$$

Postup řešení:

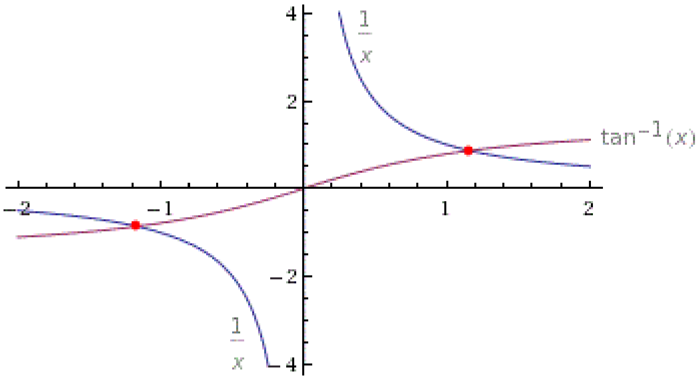
1) Upravíme rovnici do takového tvaru, kdy porovnává a popisuje dvě, nám známé, funkce (křivky).

$$f(x) = x * arctg(x) - 1$$

$$1 = x * arctg(x)$$

$$\frac{1}{x} = arctg(x)$$

2) Tyto křivky vyneseme do grafu, podle kterého odhadneme kořeny rovnice.



3) Zvolíme interval $\langle a_0; b_0 \rangle$, kde se kořen může vyskytovat a jeho krajní hodnoty dosadíme do $f(x)$.

Interval: $\langle 1; 1{,}5 \rangle$

$$f(1) = 1 * arctg(1) - 1 = -0{,}2146$$

$$f(1{,}5) = 1{,}5 * arctg(1{,}5) - 1 = 0{,}474191$$

4) Výsledky následně vynásobíme a porovnáme s nulou. Pokud je výsledek menší než nula, tak ve zvoleném intervalu leží kořen.

$$f(1) * f(1{,}5) < 0$$

5) Tento postup můžeme opakovat a zároveň i zmenšovat interval pro usnadnění výpočtu.

6) Dále je nutné vypočítat hodnotu s_n, tedy polovinu zvoleného intervalu.

$$s_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

$$s_n = \frac{1 + 1{,}5}{2}$$

$$s_n = 1{,}25$$

7) Poté je nutné spočítat funkční hodnoty v bodech a_{n-1}, b_{n-1} a s_n a tyto mezi sebou vynásobit viz níže.

Podm. 1:

$$f(a_{n-1}) * f(s_n) = ?$$

$$-0{,}2146 * 0{,}120069 < 0$$

$$\text{Pak } a_n = a_{n-1}$$

$$b_n = s_n$$

Podm. 2:

$$f(b_{n-1}) * f(s_n) = ?$$

$$0{,}474191 * 0{,}120069 > 0$$

$$\text{Pak } b_n = b_{n-1}$$

$$a_n = s_n$$

8) V každém kroku také spočítáme hodnotu d_i, která po porovnání s ε určí, kdy je možné skončit s výpočtem.

n	a_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(b_{n-1})$	s_n	$f(s_n)$	d_i
1	1	1,5	-0,2146	0,474191	1,25	0,12006	0,25
2	1	1,25	-0,2146	0,120069	1,125	-0,05033	0,125
3	1,125	1,25	-0,05033	0,120069	1,1875	0,03419	0,0625
4	1,125	1,1875	-0,05033	0,034198	1,15625	-0,00824	0,03125
5	1,15625	1,1875	-0,00824	0,034198	1,171875	0,01293	0,015625
6	1,15625	1,171875	-0,00824	0,012934	1,164063	0,00233	0,007813

Po šesti krocích jsme dostali hodnotu $d_i = 0{,}007813$ což je méně než $\varepsilon = 0{,}01$ a tedy je možno výpočet ukončit a zapsat výsledek.

$$x_1 = 1{,}164063 \pm 0{,}007813$$

Tento postup opakujeme i pro druhý kořen, avšak pokud si všimneme, že je symetricky orientován s prvním kořenem, můžeme využít předchozího výpočtu a rovnou zapsat výsledek.

$$x_2 = -1{,}164063 \pm 0{,}007813$$

Metoda Regula falsi

Mějme stejný příklad $f(x) = x * arctg(x) - 1, \varepsilon = 0{,}01$, ale řešme jej pomocí metody Regula falsi.

1) Na základě grafu funkcí zvolíme interval, ve kterém se může nacházet kořen. Zda v daném intervalu kořen skutečně leží, zjistíme stejným způsobem jako v případě metody bisekce.
2) Vypočítáme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu.
3) Vypočítáme střední hodnotu s_n podle vzorce:

$$s_n = a_{n-1} - f(a_{n-1}) * (b_{n-1} - a_{n-1}) / \big(f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})\big)$$

4) Výpočet ukončíme, jestliže je funkční hodnota v s_n menší než ε. V opačném případě pokračujeme ve výpočtu a to tímto způsobem.

$$b_n = b_{n-1}$$

$$a_n = s_n$$

Interval: $\langle 1; 1{,}5 \rangle$

n	a_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(b_{n-1})$	s_n	$f(s_n)$
1	1	1,5	-0,2146018	0,47419058	1,155781	-0,00888

$$x_1 = 1{,}155781 \pm 0{,}00888$$

Interval: $\langle -1{,}5; -1 \rangle$

n	a_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(b_{n-1})$	s_n	$f(s_n)$
1	-1,5	-1	0,47419058	-0,21460183	-1,155781	-0,00888

$$x_2 = -1{,}155781 \pm 0{,}00888$$

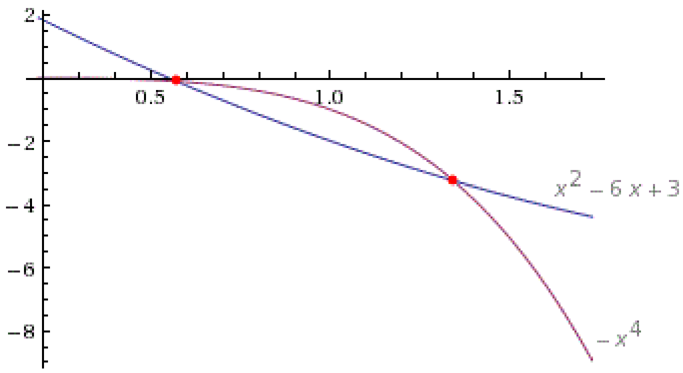
Jak je patrné, tak v některých případech je vhodné použít metodu Regula falsi, která je pro daný příklad rychlejší než metoda bisekce.

Dále uvedené příklady jsou řešeny stejným postupem jako v případě prvního příkladu.

Příklad 2

$$f(x) = x^4 + x^2 - 6x + 3$$

$$\varepsilon = 0{,}005$$



Bisekce

n	a_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(b_{n-1})$	s_n	$f(s_n)$	d_i
1	0,5	0,6	0,3125	-0,1104	0,55	0,09400625	0,05
2	0,55	0,6	0,0940062	-0,1104	0,575	-0,0100621	0,025
3	0,55	0,575	0,0940062	-0,0100621	0,5625	0,04151916	0,0125
4	0,5625	0,575	0,04151916	-0,0100621	0,56875	0,01561364	0,00625
5	0,56875	0,575	0,01561364	-0,0100621	0,571875	0,00274684	0,003125

$$x_1 = 0{,}571875 \pm 0{,}003125$$

n	a_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(b_{n-1})$	s_n	$f(s_n)$	d_i
1	1,3	1,4	-0,2539	0,4016	1,35	0,04400625	0,05
2	1,3	1,35	-0,2539	0,04400625	1,325	-0,1121558	0,025
3	1,325	1,35	-0,11215585	0,04400625	1,3375	-0,0359081	0,0125
4	1,3375	1,35	-0,03590817	0,04400625	1,34375	0,00358676	0,00625
5	1,3375	1,34375	-0,03590817	0,003586769	1,340625	-0,0162757	0,003125

$$x_2 = 1{,}340625 \pm 0{,}003125$$

Regula falsi

n	a_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(b_{n-1})$	s_n	$f(s_n)$
1	0,5	0,6	0,3125	-0,1104	0,573895	-0,00554
2	0,573895	0,6	-0,00554	-0,1104	0,572516	0,000115

$$x_1 = 0{,}572516 \pm 0{,}000115$$

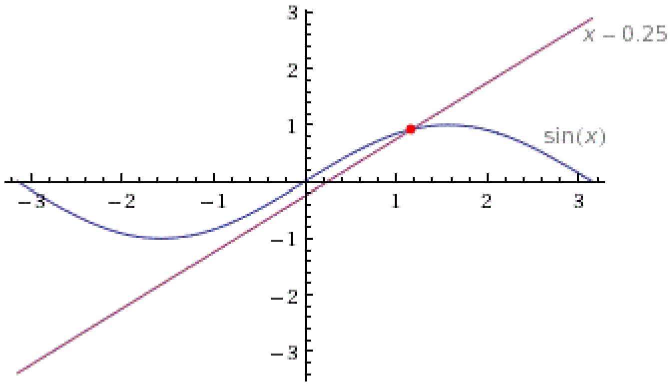
n	a_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(b_{n-1})$	s_n	$f(s_n)$
1	1,3	1,4	-0,2539	0,4016	1,338734	-0,02818
2	1,338734	1,4	-0,02818	0,4016	1,342752	-0,00278

$$x_2 = 1{,}342752 \pm 0{,}00278$$

Příklad 3

$$x - \sin x - 0{,}25 = 0$$

$$\varepsilon = 0{,}00001$$



Bisekce

n	a_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(b_{n-1})$	s_n	$f(s_n)$	d_i
1	1,1	1,2	-0,041207	0,0179609	1,15	-0,0127639	0,050000
2	1,15	1,2	-0,016689	0,0512697	1,175	0,0171798	0,025000
3	1,15	1,175	-0,016689	0,0171798	1,1625	0,0002170	0,012500
4	1,15	1,1625	-0,016689	0,0002170	1,15625	-0,0082433	0,006250
5	1,15625	1,1625	-0,008243	0,0002170	1,159375	-0,0040150	0,003125
6	1,159375	1,1625	-0,004015	0,0002170	1,1609375	-0,0018994	0,001562
7	1,160938	1,1625	-0,001899	0,0002170	1,16171875	-0,0008413	0,000781
8	1,161719	1,1625	-0,000841	0,0002170	1,16210938	-0,0003122	0,000390
9	1,162109	1,1625	-0,000312	0,0002170	1,16230469	-0,0000476	0,000195
10	1,162305	1,1625	-0,000047	0,0002170	1,16240234	0,0000847	0,000097
11	1,162305	1,162402	-0,000047	0,0000847	1,16235352	0,0000185	0,000048
12	1,162305	1,162354	-0,000047	0,0000185	1,1623291	-0,0000145	0,000024
13	1,162329	1,162354	-0,000014	0,0000185	1,16234131	0,0000020	0,000012
14	1,162329	1,162341	-0,000014	0,0000020	1,16233521	-0,0000063	0,000006

$$x_1 = 1{,}16233521 \pm 0{,}0000061$$

Regula falsi

n	a_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(b_{n-1})$	s_n	$f(s_n)$
1	1,1	1,2	-0,04121	0,017961	1,169644	-0,0009674
2	1,169644	1,2	-0,00097	0,017961	1,171196	-0,0000207
3	1,171196	1,2	-2,1E-05	0,017961	1,171229	-0,0000004

$$x_2 = 1{,}171229 \pm 0{,}0000004$$

Seznam použité literatury

[1] Dalík, J.: Numerické metody, Akademické nakladatelství CERM s.r.o. Brno, Brno 1997

[2] Škrášek, J. – Tichý, Z.: Základy aplikované matematiky I, SNTL – Nakladatelství technické literatury, n.p., Praha 1983

Za spolupráce a pod vedením Mgr. Ireny Hinterleitner, které tímto děkuji.

V Brně 2015