Iterační metody řešení jedné nelineární rovnice

- řešíme rovnici
$$f(x) = 0, \tag{$*$}$$
- k určení kořenů se používají iterační metody,
- princip iteračních metod obecně:
  - vyžadují počáteční aproximaci x_0 nebo počáteční interval $\langle a_0, b_0 \rangle$,
  - konstruují posloupnost bodů $x_1, x_2, x_3, \ldots$, které se blíží k řešení $\hat{x}$ rovnice $(*)$,
  - vždy vedou k nalezení pouze jediného řešení (i když jich může být více),
  - tím, že se výpočet neprovádí nekonečně dlouho se (téměř) vždy dopustíme nějaké chyby.
- u iteračních metod nás zejména zajímá:
  a) ALGORITMUS, tj. jak generovat $x_1, x_2, \ldots$,
  b) CHYBA, které se dopustíme, ukončíme-li algoritmus po i-té iteraci,
  c) PODMÍNKY KONVERGENCE, tj. za jakých podmínek se posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ opravdu blíží k $\hat{x}$,
  d) RYCHLOST KONVERGENCE, tj. jak rychle se $x_1, x_2, \ldots$ blíží k $\hat{x}$,
  e) STOP KRITÉRIUM, tj. kdy ukončit výpočet; nejčastěji se používá
    * předem stanovený počet iterací,
    * $|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon$,
    * $|x_i - x_{i-1}|/|x_i| \leq \varepsilon$,
    * $|f(x_i)| \leq \varepsilon$.

Věta 1 ((Bolzano))**.** Pokud funkce f je spojitá na omezeném a uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $f(a)f(b) < 0$, pak na $\langle a, b \rangle$ existuje alespoň jeden bod $\hat{x}$ takový, že $f(\hat{x}) = 0$.

Poznámka: Pokud nebude vyžadováno jinak, budeme zaokrouhlovat na **4 desetinná místa** a budeme uvažovat **stop kritérium** $|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon$. Pro přehlednost bude dále namísto desetinné čárky psána **desetinná tečka**.

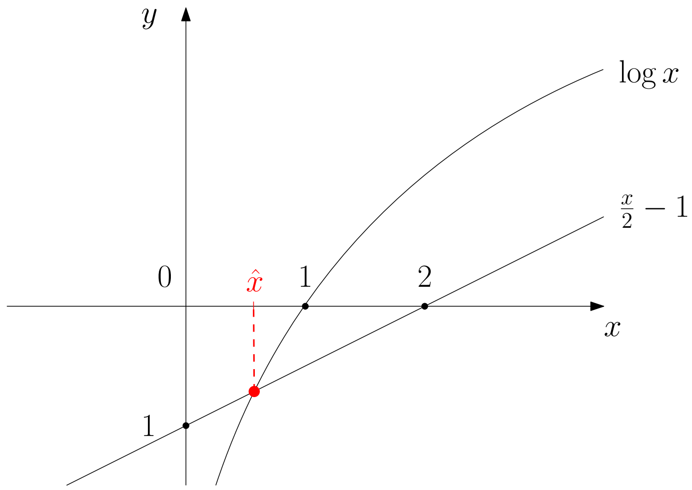
Grafická metoda

- pouze hrubý odhad počtu a polohy kořenů,
- začátek každého příkladu,
- rovnici $f(x) = 0$ přepíšeme ve tvaru $g(x) = h(x)$, kde $g(x)$ i $h(x)$ umíme nakreslit
  $\rightarrow$ průsečíky funkcí g, h dají odhady kořenů původní rovnice $(*)$,
- pro každý kořen $\hat{x}$ najdeme interval $\langle a_0, b_0 \rangle$ tak, aby $\hat{x} \in \langle a_0, b_0 \rangle$ a současně $f(a_0)f(b_0) < 0$,
- interval $\langle a_0, b_0 \rangle$ bereme raději malý.

Příklad 1: Určete počet a polohu kořenů rovnice

$$\underbrace{\log x - \frac{x}{2} + 1}_{f(x)} = 0.$$

Řešení. Rovnici přepíšeme do tvaru $\log x = \frac{x}{2} - 1$.



Můžeme odhadnout $\hat{x} \in \langle 0.1, 1 \rangle$. (Není vhodné použít int. $\langle 0, 1 \rangle$, protože $\log 0$ není definován a nešlo by dosadit.) Pomocí věty 1 ověříme, že tento interval obsahuje kořen:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ je spojitá na int. } \langle 0.1, 1 \rangle \\ f(0.1)f(1) = \frac{-1}{20} \cdot \frac{1}{2} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ interval } \langle 0.1, 1 \rangle \text{ obsahuje kořen.}$$

$\square$

Metoda bisekce (metoda půlení intervalů)

$\boxed{\text{vstup:}}$ interval $\langle a_0, b_0 \rangle$

$\boxed{\text{podmínky konvergence:}}$ f spojitá na $\langle a_0, b_0 \rangle$ a $f(a_0)f(b_0) < 0$

$\boxed{\text{algoritmus:}}$ pro každé $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$x_{i+1} := \frac{b_i + a_i}{2}$$

- pokud $f(a_i)f(x_{i+1}) < 0$, pak $a_{i+1} := a_i, b_{i+1} := x_{i+1}$,
- pokud $f(a_i)f(x_{i+1}) > 0$, pak $a_{i+1} := x_{i+1}, b_{i+1} := b_i$,

$\boxed{\text{stop:}}$

- pokud $f(x_i) = 0$ (tj. našli jsme přesné řešení),
- pokud bylo dosaženo stop kritéria.

Příklad 2: Metodou bisekce určete kořen rovnice $\log x - \frac{x}{2} + 1 = 0$ se zadanou přesností $\varepsilon = 0.05$.

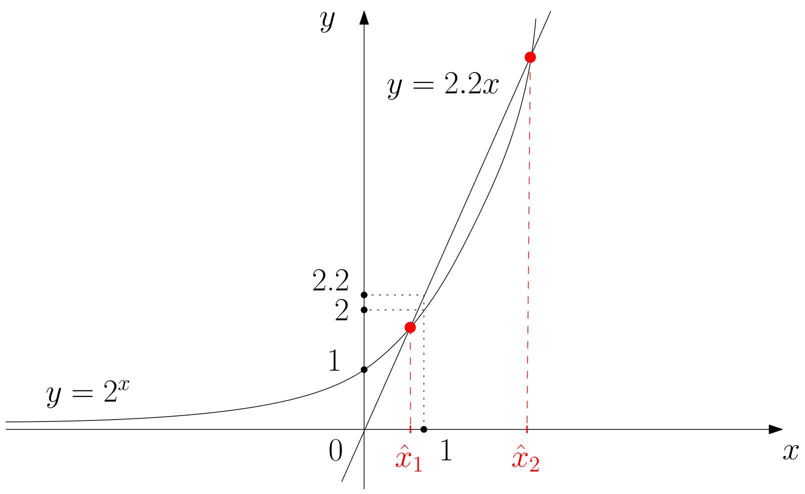
Řešení. Odhad polohy kořene $\hat{x}$ určíme grafickou metodou a dostaneme tip $\hat{x} \in \langle 0.1, 1 \rangle$. Podmínky konvergence metody bisekce jsou splněny (viz předchozí příklad). Dále bisekcí počítáme iterace:

i	a_i	b_i	x_{i+1}	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_{i+1})$
0	0.1	1	0.55	\	-0.05	0.5	0.4654
1	0.1	0.55	0.325	0.225	-0.05	0.4654	0.3494
2	0.1	0.325	0.2125	0.1125	-0.05	0.3494	0.2211
3	0.1	0.2125	0.1563	0.0562	-0.05	0.2211	0.1158
4	0.1	0.1563	0.1282	$0.0281 < \varepsilon$		$\rightarrow$	STOP

Dostali jsme tak přibližné řešení $\hat{x} \approx x_5 = 0.1282$. □

Příklad 3: Metodou bisekce odhadni nejmenší kořen rovnice $2.2x - 2^x = 0$, počáteční aproximaci odhadni grafickou metodou. Stop kritérium zvolte $|f(x_i)| \leq \varepsilon$ pro $\varepsilon = 0.01$.

Řešení. (a) **Grafická metoda:** Rovnici převedeme na tvar $2.2x = 2^x$ a obě funkce nakreslíme.



Odhadneme polohu kořene $\hat{x}_1$ např. $\hat{x}_1 \in \langle 0, 1 \rangle$. Dále ověříme, že na tomto intervalu kořen opravdu je:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá na int. } \langle 0, 1 \rangle \\ f(0)f(1) = -1 \cdot 0.2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ interval } \langle 0, 1 \rangle \text{ obsahuje kořen.}$$

(b) **Metoda bisekce:** Podmínky konvergence metody bisekce jsou splněny (viz předchozí). Počítáme iterace:

i	a_i	b_i	x_{i+1}	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_{i+1})$
0	0	1	0.5	-1	0.2	-0.3142
1	0.5	1	0.75	-0.3142	0.2	-0.0318
2	0.75	1	0.875	-0.0318	0.2	0.0910
3	0.75	0.875	0.8125	-0.0318	0.0910	0.0312
4	0.75	0.8125	0.7813	STOP	$\rightarrow$	$0.0002 < \varepsilon$

Přibližný kořen rovnice $2.2x - 2^x = 0$ je $\hat{x}_1 \approx x_5 = 0.7813$.

□

Metoda regula falsi

$\boxed{\text{vstup:}}$ interval $\langle a_0, b_0 \rangle$

$\boxed{\text{podmínky konvergence:}}$ f spojitá na $\langle a_0, b_0 \rangle$ a $f(a_0)f(b_0) < 0$

$\boxed{\text{algoritmus:}}$ pro každé $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$x_{i+1} := a_i - f(a_i)\frac{b_i - a_i}{f(b_i) - f(a_i)}$$

- pokud $f(a_i)f(x_{i+1}) < 0$, pak $a_{i+1} := a_i, b_{i+1} := x_{i+1}$,
- pokud $f(a_i)f(x_{i+1}) > 0$, pak $a_{i+1} := x_{i+1}, b_{i+1} := b_i$,

$\boxed{\text{stop:}}$

- pokud $f(x_i) = 0$ (tj. našli jsme přesné řešení),
- pokud bylo dosaženo stop kritéria.

Příklad 4: Metodou regula falsi vyřešte příklad 3.

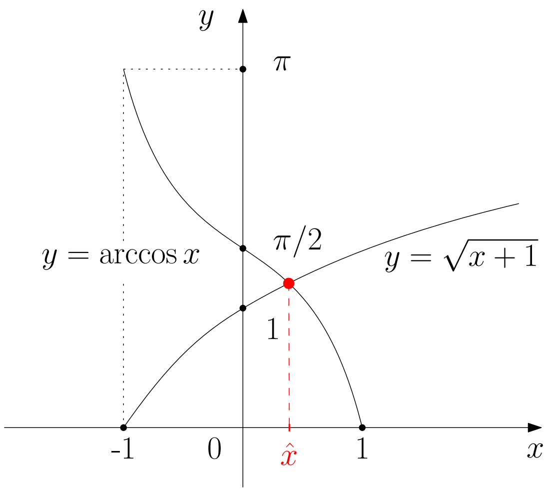
Řešení. Máme odhad kořene $\hat{x}_1 \in \langle 0, 1 \rangle$. Zřejmě jsou splněny podmínky konvergence metody regula falsi (stejné jako u bisekce). Počítáme iterace:

i	a_i	b_i	x_{i+1}	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_{i+1})$
0	0	1	0.8333	-1	0.2	0.0515
1	0	0.8333	0.7925	-1	0.0515	0.0114
2	0	0.7925	0.7836	STOP	$\rightarrow$	$0.0025 < \varepsilon$

Přibližný kořen rovnice $2.2x - 2^x = 0$ je $\hat{x}_1 \approx x_3 = 0.7836$. □

Příklad 5: Metodou regula falsi určete přibližné řešení rovnice $\arccos x - \sqrt{x+1} = 0$, počáteční aproximaci určete grafickou metodou. Spočítejte první 3 iterace (tj. urči x_3).

Řešení. (a) **Grafická metoda:** Rovnici převedeme na tvar $\arccos x = \sqrt{x+1}$ a obě funkce nakreslíme.



Odhadneme polohu kořene $\hat{x}$, např. pomocí intervalu $\hat{x} \in \langle 0, 1\rangle$. Dále ověříme, že na tomto intervalu kořen opravdu je:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ je spojitá na int. } \langle 0,1\rangle \\ f(0)f(1) = (\frac{\pi}{2} - 1)\cdot(0-\sqrt{2}) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ interval } \langle 0,1\rangle \text{ obsahuje kořen.}$$

(b) **Metoda regula falsi:**

i	a_i	b_i	x_{i+1}	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_{i+1})$
0	0	1	0.2876	0.5708	-1.4142	0.1444
1	0.2876	1	0.3536	0.1444	-1.4142	0.0459
2	0.3536	1	0.3739	0.0459	-1.4142	\

Přibližný kořen rovnice $\arccos x - \sqrt{x+1} = 0$ je $\hat{x} \approx x_3 = 0.3739$.

$\square$

Metoda tečen (Newtonova metoda)

vstup: počáteční aproximace x_0 kořene $\hat{x}$

podmínky konvergence: Nechť $\hat{x} \in \langle a, b \rangle$.

- f spojitá na $\langle a, b \rangle$,
- f' spojitá na $\langle a, b \rangle$,
- f'' spojitá na $\langle a, b \rangle$,
- $f(a)f(b) < 0$,
- $f' \neq 0$ pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$
- $f'' \neq 0$ pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$
- $f(x_0)f''(x_0) > 0$ pro $x_0 \in \langle a, b \rangle$

Pak pro počáteční bod x_0 Newtonova metoda konverguje k řešení na $\langle a, b \rangle$.

algoritmus: pro každé $i = 0, 1, 2, \dots$

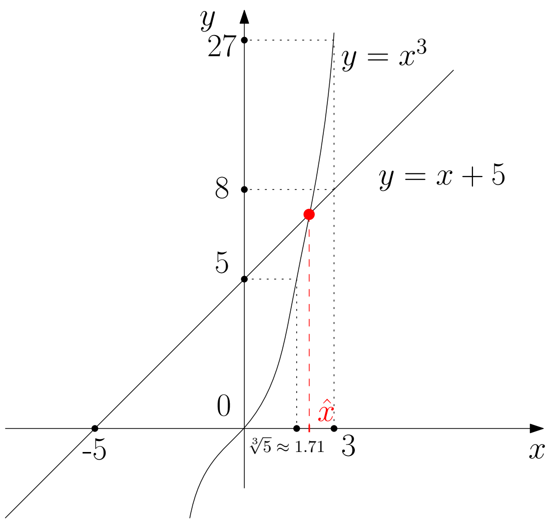
$$x_{i+1} := x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

stop:

- pokud $f(x_i) = 0$ (tj. našli jsme přesné řešení),
- pokud bylo dosaženo stop kritéria.

Příklad 6: Newtonovou metodou najděte kořeny rovnice $x^3 - x - 5 = 0$ s přesností $\varepsilon = 0.001$. Odhad polohy kořenů určete grafickou metodou. Ověřte podmínky konvergence Newtonovy metody.

Řešení. (a) **Grafická metoda:** Rovnici převedeme na tvar $x^3 = x + 5$ a obě funkce nakreslíme.



Kořen $\hat{x} \in \langle 1.7, 3 \rangle$.

(b) **Newtonova metoda:** Ověření podmínek konvergence na intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 1.7, 3\rangle$:

podmínka	
$f = x^3 - x - 5$ spojitá	✓
$f' = 3x^2 - 1$ spojitá	✓
$f'' = 6x$ spojitá	✓
$f(1.7)f(3) = -1.787 \cdot 19 < 0$	✓
$f' \neq 0$ na $\langle 1.7, 3\rangle$	$f' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0.5774 \notin \langle 1.7, 3\rangle$ ✓
$f'' \neq 0$ na $\langle 1.7, 3\rangle$	$f'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \langle 1.7, 3\rangle$ ✓
$f(x_0)f''(x_0) > 0$ pro $x_0 \in \langle 1.7, 3\rangle$	pro $x_0 = 1.7$ je $f(1.7)f''(1.7) = -1.787 \cdot 10.2$ - ZLE pro $x_0 = 3$ je $f(3)f''(3) = 19 \cdot 18$ ✓

$\rightarrow$ startovní bod x_0 volíme $x_0 = 3$. Iterace Newtonovy metody jsou pak následující:

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	3	\	19	26
1	2.2692	0.7308	4.4155	14.4478
2	1.9636	0.3056	0.6075	10.5672
3	1.9061	0.0575	0.0192	9.8997
4	1.9042	0.0019	0.0004	9.8779
5	1.9042	$\approx 0 < \varepsilon$	$\rightarrow$	STOP

Přibližný kořen rovnice $x^3 - x - 5 = 0$ je $\hat{x} \approx x_5 = 1.9042$.

□

Příklad 7: Newtonovou metodou určete řešení rovnice $3\ln x - x + 4 = 0$ na intervalu $\langle 0.2, 0.4\rangle$ s přesností $\varepsilon = 0.001$. Ověřte podmínky konvergence.

Řešení. Ověříme konvergenční podmínky na int. $\langle 0.2, 0.4\rangle$:

podmínka	
$f = 3\ln x - x + 4$ spojitá	✓
$f' = \frac{3}{x} - 1$ spojitá	✓
$f'' = -\frac{3}{x^2}$ spojitá	✓
$f(0.2)f(0.4) = -1.0283 \cdot 0.8511 < 0$	✓
$f' \neq 0$ na $\langle 0.2, 0.4\rangle$	$f' = 0 \Leftrightarrow x = 3 \notin \langle 0.2, 0.4\rangle$ ✓
$f'' \neq 0$ na $\langle 0.2, 0.4\rangle$	$f'' = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ ✓
$f(x_0)f''(x_0) > 0$ pro $x_0 \in \langle 0.2, 0.4\rangle$	pro $x_0 = 0.2$ je $f(0.2)f''(0.2) = -1.0283 \cdot -75 > 0$ - ZLE pro $x_0 = 0.4$ je $f(0.4)f''(0.4) = 0.8511 \cdot (-18.75) < 0$ ✓

$\rightarrow$ startovní bod x_0 volíme $x_0 = 0.4$. Iterace Newtonovy metody jsou pak následující:

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	0.4	\	0.8511	6.5
1	0.2691	0.1309	-0.2071	10.1483
2	0.2895	0.0204	-0.0083	9.3627
3	0.2904	$0.0009 < \varepsilon$	$\rightarrow$	STOP

Přibližný kořen rovnice $3\ln x - x + 4 = 0$ je $\hat{x} \approx x_3 = 0.2904$. □

Metoda sečen

$\boxed{\text{vstup:}}$ počáteční aproximace x_0, x_1 kořene $\hat{x}$

$\boxed{\text{podmínky konvergence:}}$ Metoda funguje, jen pokud jsou počáteční aproximaci dostatečně blízko kořene.

$\boxed{\text{algoritmus:}}$ pro každé $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$x_{i+1} := x_i - f(x_i)\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

$\boxed{\text{stop:}}$

- pokud $f(x_i) = 0$ (tj. našli jsme přesné řešení),
- pokud bylo dosaženo stop kritéria.

Příklad 8: Metodou sečen řešte příklad 7. Startovní body použijte $x_0 = 0.4, x_1 = 0.35$.

Řešení. Podle algoritmu počítáme iterace:

i	x_i	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$	$f(x_i)$
0	0.4	\	0.8511
1	0.35	0.05	0.5005
2	0.2786	0.0714	-0.1125
3	0.2917	0.0131	0.0122
4	0.2904	0.0013	0.0001
5	0.2904	$\approx 0 < \varepsilon$	$\rightarrow$ STOP

Přibližný kořen rovnice $3\ln x - x + 4 = 0$ je $\hat{x} \approx x_5 = 0.2904$. □