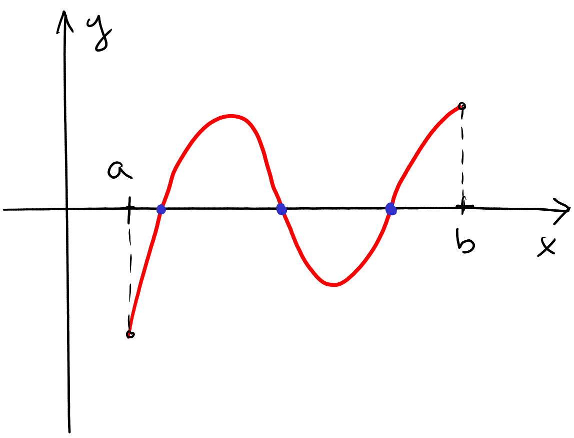
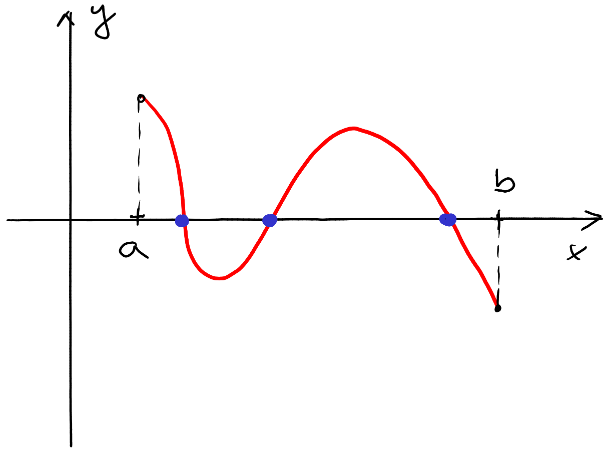
NUMERICKÉ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC – I. část (bisekce, regula falsi)

Hledáme kořen $\hat{x}$ rovnice $f(x) = 0$.

Věta: Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $\boldsymbol{f(a) \cdot f(b) < 0}$, pak má funkce f na (a, b) alespoň jeden kořen.



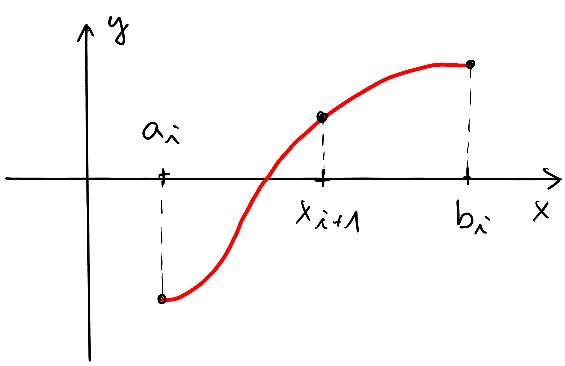


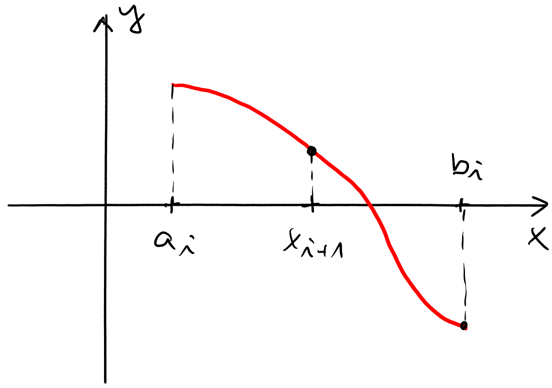
Postup:

1) Určíme dostatečně malý **výchozí interval** (a_0, b_0), který obsahuje jediný kořen.

2) Výchozí interval postupně zmenšujeme (tj. konstruujeme posloupnost do sebe vnořených intervalů $(a_0, b_0) \supset (a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \cdots \supset (a_i, b_i) \supset (a_{i+1}, b_{i+1}) \supset \ldots$ s vlastností $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$)
$\rightarrow$ v intervalu (a_i, b_i) vybereme x_{i+1} $\rightarrow$

- $f(x_{i+1}) = 0 \ldots x_{i+1}$ je kořen
- $f(x_{i+1}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(a_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0 & \Rightarrow \quad a_{i+1} = a_i, \quad b_{i+1} = x_{i+1} \\ f(x_{i+1}) \cdot f(b_i) < 0 & \Rightarrow \quad a_{i+1} = x_{i+1}, \quad b_{i+1} = b_i \end{cases}$





Ukončení: Zadané malé kladné číslo ε a kritérium, kdy ukončit výpočet $\rightarrow$ rovnice vyřešena s chybou menší než ε.

BISEKCE (METODA PŮLENÍ INTERVALU)

- x_{i+1} je střed intervalu (a_i, b_i), tj.

$$\boldsymbol{x_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}}$$

- **Odhad chyby:** $d_i = \dfrac{b_i - a_i}{2} = \dfrac{b_0 - a_0}{2^{i+1}}$

  … i kroků metody půlení zmenší odhad chyby 2^i-krát

  – d_i je polovina délky intervalu (a_i, b_i)

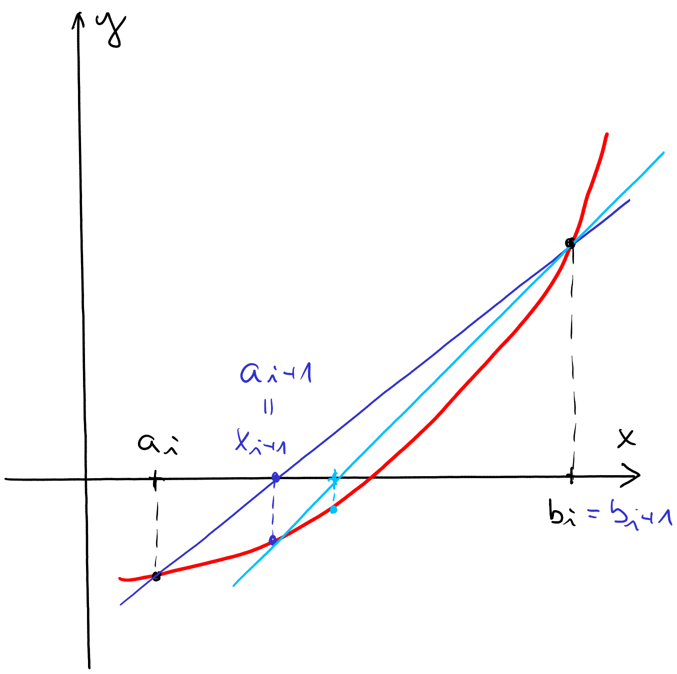
- **Podmínka ukončení:** $d_i < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = x_{i+1} \pm d_i$

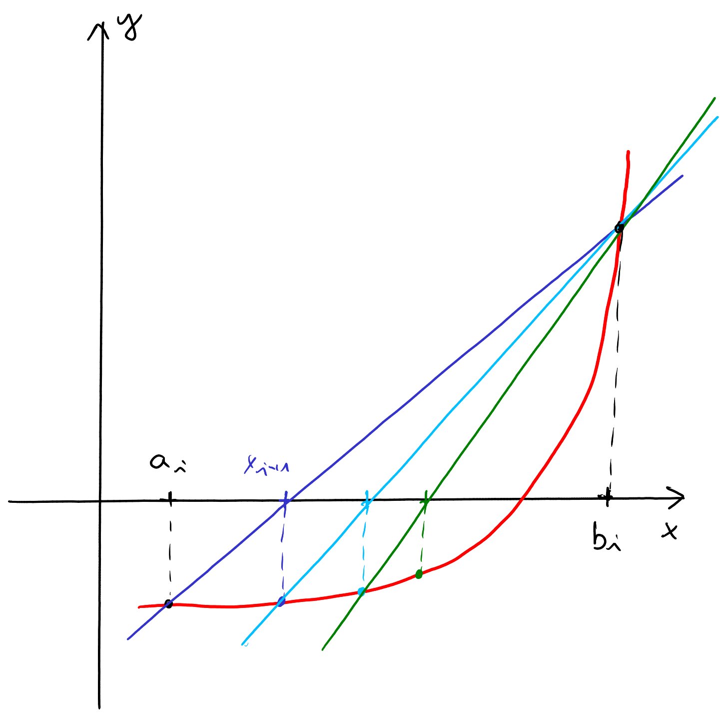
REGULA FALSI (METODA TĚTIV)

- x_{i+1} z intervalu (a_i, b_i) je průsečík přímky procházející body $[a_i, f(a_i)]$ a $[b_i, f(b_i)]$ s osou x, tj.

$$\boldsymbol{x_{i+1} = \frac{a_i \cdot f(b_i) - b_i \cdot f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}}$$

- **Podmínka ukončení:** $|f(x_{i+1})| < \varepsilon$





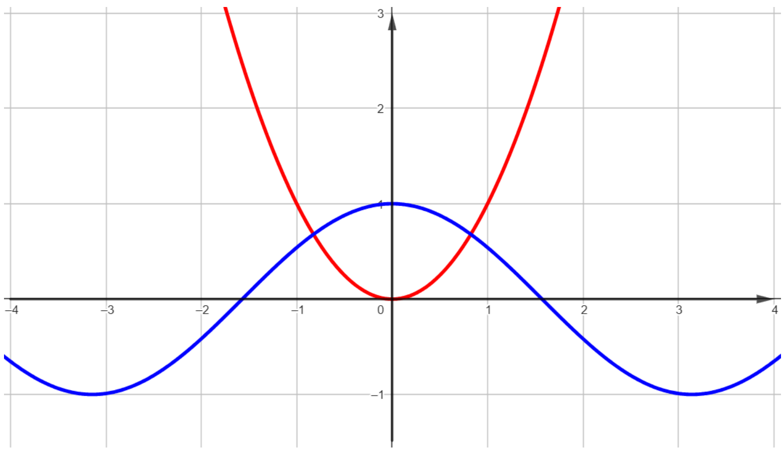
POZOR NA TVAR DANÉ FUNKCE

Příklad: Graficky odhadněte počet a polohu kořenů rovnice

a) $x^2 - \cos x = 0$,

b) $(x-1)^3 - \sqrt{x+2} = 0$.

a)



$x^2 = \cos x$

$\Rightarrow$ 2 KOŘENY

$\hat{x}_1 \in (-1, 0)$, $\hat{x}_2 \in (0, 1)$

OVĚŘENÍ:

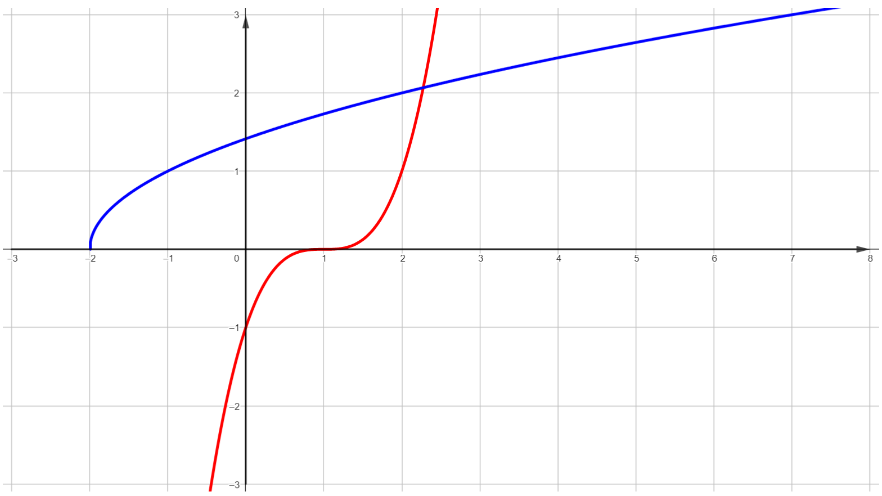
$f(-1) = (-1)^2 - \cos(-1) > 0$

$f(0) = 0^2 - \cos 0 < 0$

$f(1) = 1^2 - \cos 1 > 0$

$\Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0$, $f(0) \cdot f(1) < 0$

b)



$(x-1)^3 = \sqrt{x+2}$

$\Rightarrow$ 1 KOŘEN

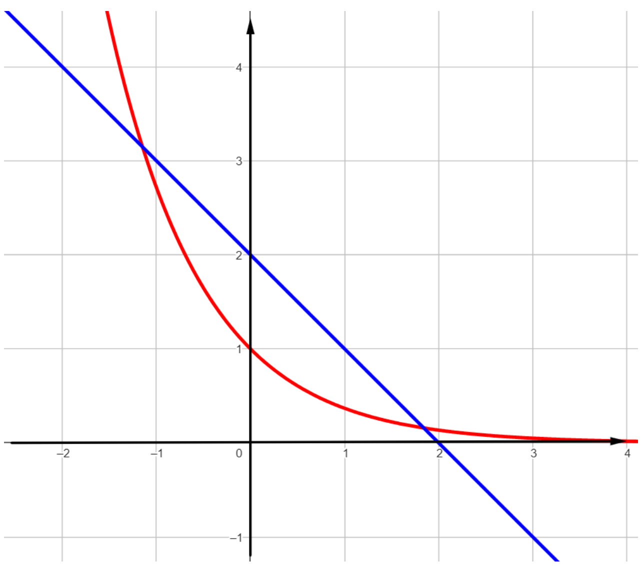
$\hat{x} \in (2, 3)$

$f(2) = 1 - 2 = -1 < 0$

$f(3) = 8 - \underbrace{\sqrt{5}}_{\doteq 2,2} > 0$

$\Rightarrow f(2) \cdot f(3) < 0$

Příklad: Graficky odhadněte počet a polohu kořenů $x + e^{-x} - 2 = 0$. Aproximujte kladný kořen s chybou menší než $\varepsilon = 0,01$. (Zaokrouhlujte na 4 desetinná místa.)



$e^x = 2 - x$ 2 KOŘENY

$\hat{x}_1 \in (-2, -1)$, $\hat{x}_2 \in (1, 2)$

$\left. \begin{array}{l} f(-2) = 3,3891 \\ f(-1) = -0,2817 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-2) \cdot f(-1) < 0$

$\left. \begin{array}{l} f(1) = -0,6321 \\ f(2) = 0,1353 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$

Bisekce:

ODHAD POČTU KROKŮ

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{2^{i+1}} < 0{,}01$$

$$\frac{1}{0{,}01} < 2^{i+1}$$

$$100 < 2 \cdot 2^{i}$$

$$2^{i} > 50$$

$$i > \log_2 50 = 5{,}6439$$

$$\underline{\underline{i = 6}} \qquad d_6 = \frac{b_0 - a_0}{2^7} = \frac{1}{2^7} = 0{,}0078$$

i	a_i	b_i	x_{i+1}	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_{i+1})$
0	1	2	1,5	−0,6321	0,1353	−0,2769
1	1,5	2	1,75	$-0,2769$	$0,1353$	$-0,0762$
2	1,75	2	1,875	$-0,0762$	$0,1353$	$0,0284$
3	1,75	1,875	1,8125	$-0,0762$	$0,0284$	$-0,0243$
4	1,8125	1,875	1,8438	$-0,0243$	$0,0284$	$0,0020$
5	1,8125	1,8438	1,8282	$-0,0243$	$0,0020$	$-0,0111$
6	1,8282	1,8438	1,836	$-0,0111$	$0,0020$	$-0,0045$

$$\hat{x} = x_7 \pm d_6 = \underline{\underline{1{,}836 \pm 0{,}0078}}$$

Regula falsi:

i	a_i	b_i	x_{i+1}	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_{i+1})$
0	1	2	1,8237	$-0,6321$	$0,1353$	$-0,0149 > \varepsilon$
1	1,8237	2	1,8412	$-0,0149$	$0,1353$	$-0,0002 < \varepsilon$

$$\underline{\underline{\hat{x} = 1{,}8412}}$$