FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Matematika 1

Numerické řešení nelineární rovnice

$$e^x - 2x - 2 = 0$$

Metody: grafická, bisekce, regula falsi, tečen (Newtonova), sečen

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2016

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

Nelineární rovnice o jedné neznámé **4**
Postup při hledání kořenů 5
Separace kořenů 5
Aproximace kořenů 6
Zastavovací podmínky 6

Příklad: $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 2$ **8**
1. separace kořenů — GRAFICKÁ metoda 8

Startovací metody
Metoda půlení intervalu (bisekce) 9
kořen: $-1 < \alpha < 0$ 9
Metoda tětiv (regula falsi) 13
kořen: $1 < \beta < 2$ 14

Zpřesňující metody
Metoda tečen (Newtonova metoda) 17
kořen: $1 < \beta < 2$ 18
Metoda sečen 20
kořen: $-1 < \alpha < 0$ 21

Použitá literatura **23**

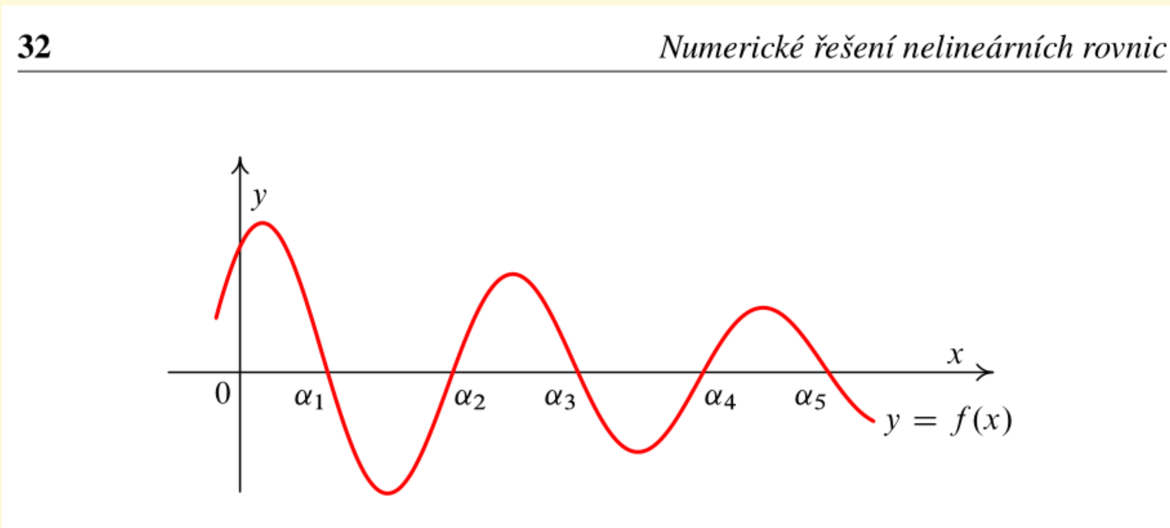
Nelineární rovnice o jedné neznámé

S potřebou *vyřešit* nějakou rovnici (1), nebo-li najít kořeny funkce $f(x)$, se setkáváme v mnoha oborech, avšak jen výjimečně dokážeme kořeny přesně určit. V takovýchto případech lze ale najít přibližnou hodnotu kořene pomocí některé numerické metody spočívající v tom, že se v jednotlivých krocích výpočtu postupně získávají stále přesnější aproximace hledaného kořene.

V dalším se tedy budeme zabývat hledáním reálných kořenů rovnice

$$f(x) = 0\,, \tag{1}$$

kdy požadujeme najít x—ové souřadnice průsečíků grafu funkce $\boldsymbol{f}$ s osou $\boldsymbol{x}$ — viz obr. 1.



Obr. 2.1 : Kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ rovnice $f(x) = 0$

Obrázek 1: [8, str. 32]

O funkci jedné proměnné $f(x)$ budeme předpokládat, že je alespoň spojitá. Tato vlastnost nám zaručí existenci kořenů. Protože má-li spojitá funkce ve dvou bodech opačná znaménka, má podle Cauchyovy–Bolzanovy věty mezi nimi kořen.

Uvedená věta (Cauchy–Bolzano) viz [7, str. 407] nám říká, že ***spojitá*** funkce, která má v krajních bodech uzavřeného ohraničeného intervalu $\langle a\, ;\, b\rangle$ funkční hodnoty opačných znamének

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \tag{2}$$

má uvnitř otevřeného intervalu $(a\, ;\, b)$ aspoň jeden ***kořen***. To znamená, že graf této funkce protne uvnitř intervalu $(a\, ;\, b)$ někde osu $\boldsymbol{x}$. Bez předpokladu spojitosti nemá úloha (1) smysl.

Postup při hledání kořenů

Hledání kořenů lze v zásadě rozdělit na následující dva kroky:

Separace kořenů — určení intervalu, který je dostatečně malý a obsahuje jediný kořen.

Pro separaci kořenů neexistuje jednoznačná a spolehlivá univerzální metoda. Obvykle informaci o poloze kořenů získáváme některým z následujících postupů:

Graficky — z obrázku grafu funkce přibližně odhadneme polohu kořenů. Tento způsob je dnes, kdy jsou k dispozici počítačové programy, které graf dokáží s velkou přesností nakreslit, ***nejčastější***.

Pomocí tabulky hodnot — vypočítáme funkční hodnoty ve vhodných bodech $\boldsymbol{x}$ a vybereme ty intervaly, v jejichž krajních bodech mají funkční hodnoty opačná znaménka. Tento postup byl typický ***v minulosti***, kdy byly k dispozici pouze kalkulačky, případně tabulky.

Ze zkušeností — z vlastností problému, který je uvažovanou rovnicí modelován.

Aproximace kořenů — zpřesňování jejich hodnoty.

Hledáme takovou posloupnost čísel $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, která konverguje ke kořenu α. Platí tedy:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \qquad \text{a} \qquad f(\alpha) = 0$$

Na počítači pochopitelně můžeme určit pouze konečný počet členů posloupnosti $\{x_n\}$. V určitý okamžik musíme proces ukončit. Obvykle se zadá malé kladné číslo ε a posuzuje se, zda nějaká veličina je již menší než toto číslo. Ideální by bylo posuzovat hodnotu $|x_n - \alpha|$, neboli rozdíl od přesné hodnoty kořene α. Hodnotu kořene však neznáme, proto v praxi k zastavení iteračního procesu používáme některou z následujících **zastavovacích podmínek**:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \tag{3}$$

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon \tag{4}$$

$$|f(x_n)| < \varepsilon \tag{5}$$

Jakmile je pro některé ***n*** zvolená podmínka splněna, proces ukončíme a klademe $\alpha \doteq x_n$.
Číslo ε se nazývá ***přesnost řešení***.

Poznámka

1. Splnění kterékoli ze zastavovacích podmínek neznamená, že absolutní chyba řešení $|\alpha - x_n|$ je menší než zvolené ε.

   Je-li například graf funkce f v okolí kořene plochý, může být hodnota $|f(x_n)|$ velmi malá, takže při použití podmínky (5) je proces zastaven, přestože kořen je ještě hodně vzdálen.

Podobně je tomu i u druhých dvou zastavovacích podmínek.

2. Pokud je kořen α blízký nule nebo je naopak velmi velký, je vhodné použít zastav. podmínku (4).

3. Při velmi pomalé konvergenci je vhodné nastavit maximální povolený počet iterací s následnou signalizací, že nebyla dodržena požadovaná přesnost. V důsledku zaokrouhlovacích chyb se totiž může stát, že požadovaná zastavovací podmínka nebude nikdy splněna.

Některé z dále uvedených metod (pomocí kterých zpřesňujeme hodnotu kořene ⇒ provádíme jeho aproximaci) jsou stabilní. To znamená, že pro zajištění toho, že vypočtené aproximace se k hledanému kořenu skutečně přibližují, stačí zadat interval, o němž je známo, že v něm alespoň jeden kořen leží. Jiné metody vyžadují zadání počáteční aproximace „dostatečně blízko" kořene; za to je potom výpočet efektivní, což jinými slova znamená, že vypočtené aproximace se ke kořenu přibližují velmi rychle.

Metody numerického řešení nelineární rovnice obvykle dělíme na dva typy:

Startovací metody — jsou vždy konvergentní, ale konvergence je pomalá.

Sem řadíme metodu **bisekce** (metodu půlení intervalu) a metodu **regula falsi** (metodu tětiv), které konvergují za dosti obecných předpokladů, ale jejich konvergence bývá pomalá. Proto se používají pouze k hrubé aproximaci kořene.

Zpřesňující metody — jsou rychlejší, ale počáteční aproximace musí být dostatečně blízko kořenu, aby metoda konvergovala.

Sem řadíme metodu **tečen** (Newtonovu metodu) a metodu **sečen**.

Obvykle postupujeme tak, že **pomocí sestrojeného grafu provedeme separaci kořene**. Určíme dostatečně malý interval obsahující jediný kořen dané rovnice. Pak některou **startovací metodou najdeme přibližnou hodnotu tohoto kořene**. Tu pak **zlepšíme vhodnou zpřesňující metodou**.

V konkrétním případě může být startovací metoda rychlá a zpřesňující metoda pomalá.

Příklad: Určete kořeny funkce $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 2$

1. separace kořenů — GRAFICKÁ metoda

Najít kořeny funkce $f(x)$ znamená najít kořeny rovnice (řešit rovnici) $f(x) = 0$, protože funkční hodnota v kořenu α je rovna nule: $f(\alpha) = 0$.

V našem případě rovnici

$$\mathrm{e}^x - 2x - 2 = 0$$

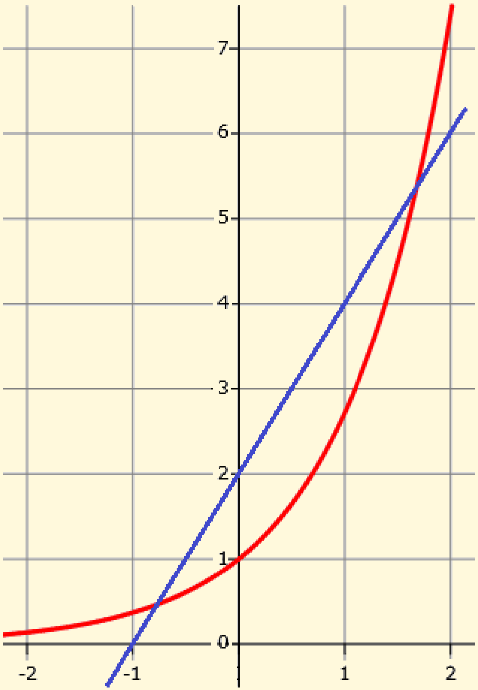
nejdříve upravíme na tvar:

$$\color{red}{\mathrm{e}^x} = \color{blue}{2x + 2}$$

I bez přesného rýsování separujeme dva kořeny:

$$\alpha_1 \in (-1\,;\,0) \qquad \alpha_2 \in (1\,;\,2)$$

což si můžeme i bez kalulačky ověřit.



Ověření:
$$f(-1) = \mathrm{e}^{(-1)} - 2\cdot(-1) - 2 \doteq \frac{1}{2{,}7} + 2 - 2 = \frac{1}{2{,}7} > 0$$
$$f(0) = \mathrm{e}^{(0)} - 2\cdot(0) - 2 = 1 - 0 - 2 = -1 < 0$$
$$\Longrightarrow \quad f(-1)\cdot f(0) < 0$$

a podle věty 2 (Cauchyovy–Bolzanovy) interval $(-1\,;\,0)$ obsahuje alespoň jeden kořen.

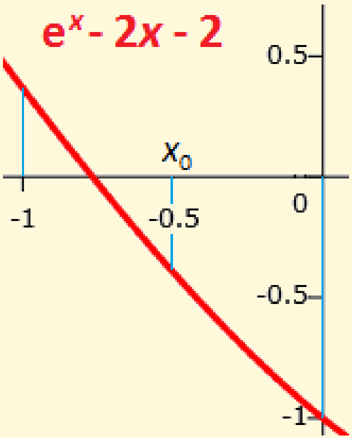
Obdobně: $f(1) = e^{(1)} - 2 \cdot (1) - 2 \doteq 2{,}7 - 4 = -1{,}3 < 0$
$f(2) = e^{(2)} - 2 \cdot (2) - 2 > 2{,}6^2 - 6 = 6{,}76 - 6 > 0$ $\implies$ $f(1) \cdot f(2) < 0$

a podle věty 2 také interval $(1\,;\,2)$ obsahuje alespoň jeden kořen.

Metoda půlení intervalu (bisekce) — kořen: $\alpha \in (-1\,;\,0)$

Za členy posloupnosti $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, která konverguje ke kořenu α, ***volíme středy intervalů*** $(a_n\,;\,b_n)$, Jedná se vždy o konvergentní metodu (například [8, str. 36]), která je obecně pomalá. Máme však dolní i horní odhad pro hodnotu kořenu, protože $a_n < \alpha < b_n$.

Nevyužívají se žádné speciální vlastnosti funkce f (stačí, když $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$), ani se nevyžaduje, aby interval obsahoval jediný kořen. Pokud ***výchozí interval*** $(a_0\,;\,b_0)$ obsahoval více kořenů, posloupnost $\{x_n\}$ daná touto metodou sice konverguje k nějakému kořenu rovnice $f(x) = 0$, nevíme ovšem ke kterému. Ve výsledném intervalu $(a_n\,;\,b_n)$ může být v tomto případě více kořenů.



Hledáme kořen $\alpha \in (a_n\,;\,b_n)$. Jako člen x_n posloupnosti ***aproximací*** volíme **střed** tohoto intervalu.

Začátek CYKLU $$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Určíme funkční hodnotu $f(x_n)$; mohou nastat tři možnosti:

$f(x_n) = 0$ našli jsme kořen a ***výpočet ukončíme!***

$f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$ položíme $\boldsymbol{a}_{n+1} = a_n$, $\boldsymbol{b}_{n+1} = x_n$ (obr. pro $n = 0$)

$f(x_n) \cdot f(b_n) < 0$ položíme $\boldsymbol{a}_{n+1} = x_n$, $\boldsymbol{b}_{n+1} = b_n$

Konec CYKLU neplatí-li zastavovací podmínka, cyklus opakujeme.

Hodnoty $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 2$ včetně aproximací kořene můžeme zapsat do následující tabulky.

$$a_0 = \mathbf{-1}$$
$$f(a_0) = \mathrm{e}^{-1} - 2 \cdot (-1) - 2 \doteq 0{,}368$$

$$b_0 = \mathbf{0}$$
$$f(b_0) = \mathrm{e}^{0} - 2 \cdot 0 - 2 = -1$$

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{-1+0}{2} = \mathbf{-0{,}5}$$

Hodnoty $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 2$ včetně aproximací kořene můžeme zapsat do následující tabulky.

$a_0 = -1$ $f(a_0) \doteq 0{,}368$		$b_0 = 0$ $f(b_0) = -1$
	$x_0 = -0{,}5$ $f(x_0) \doteq -0{,}393$	
$a_1 = -1$ $f(a_1) \doteq 0{,}368$	$b_1 = -0{,}5$ $f(b_1) \doteq -0{,}393$	
$x_1 = -0{,}75$ $f(x_1) \doteq -0{,}028$		

Aproximace kořene: $-0{,}5 \quad -0{,}75 \quad -0{,}875 \quad \ldots$

Hodnoty $f(x) = e^x - 2x - 2$ můžeme zapsat do následující tabulky.

$\mathbf{-1}$ f(-1) ≐0,368	$\mathbf{0}$ f(0) = -1
$\mathbf{-1}$ f(-1) ≐0,368	$\mathbf{-0{,}5}$ f(-0,5) ≐-0,393
$\mathbf{-1}$ f(-1) ≐0,368	$\mathbf{-0{,}75}$ f(-0,75) ≐-0,028
$\mathbf{-0{,}875}$ f(-0,875) ≐0,168	$\mathbf{-0{,}75}$ f(-0,75) ≐-0,028
$\mathbf{-0{,}812\,5}$ f(-0,812 5) ≐0,069	$\mathbf{-0{,}75}$ f(-0,75) ≐-0,028
$\mathbf{-0{,}781\,25}$ f(-0,781 25) ≐0,020	$\mathbf{-0{,}75}$ f(-0,765 625) ≐-0,028
$\mathbf{-0{,}781\,25}$ f(-0,781 25) ≐0,020	$\mathbf{-0{,}765\,625}$ f(-0,765 625) ≐-0,004
$\mathbf{-0{,}773\,437\,5}$ f(-0,773 437 5) ≐0,008	$\mathbf{-0{,}765\,625}$ f(-0,765 625) ≐-0,004
$\mathbf{-0{,}769\,531\,25}$ f(-0,769 531 25) ≐0,002	$\mathbf{-0{,}765\,625}$ f(-0,765 625) ≐-0,004
$\mathbf{-0{,}769\,531\,25}$ f(-0,769 531 25) ≐0,002	$\mathbf{-0{,}767\,578\,125}$ f(-0,767 578 125) ≐-0,001

Metoda tětiv (regula falsi) — kořen: $\beta \in (1\,;\,2)$

Za členy posloupnosti $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, která konverguje ke kořenu β, ***volíme průsečíky*** $[x_n\,;\,0]$ osy $\boldsymbol{x}$ s přímkou (tětivou) procházející body $A = [a_n\,;\,f(a_n)]$, $B = [b_n\,;\,f(b_n)]$. Jedná se vždy o konvergentní metodu (viz například [8, str. 40]), která je obecně poměrně pomalá.

Nevyužívají se žádné speciální vlastnosti funkce f (stačí, když $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$), ani se nevyžaduje, aby interval obsahoval jediný kořen. Pokud ***výchozí interval*** $(a_0\,;\,b_0)$ obsahoval více kořenů, posloupnost $\{x_n\}$ daná touto metodou sice konverguje k nějakému kořenu rovnice $f(x) = 0$, nevíme ovšem ke kterému. Ve výsledném intervalu $(a_n\,;\,b_n)$ může být v tomto případě více kořenů.

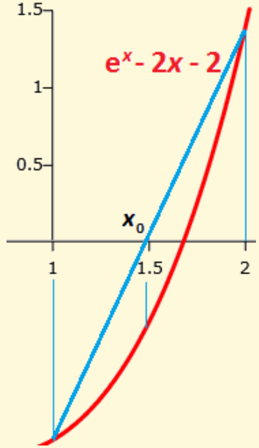
Hledáme kořen $\beta \in (a_n\,;\,b_n)$. Jako člen x_n posloupnosti ***aproximací*** volíme průsečík osy $\boldsymbol{x}$ s tětivou procházející body $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.

Zvolíme-li jako směrový vektor $\overrightarrow{AB} = (b_n - a_n\,;\,f(b_n) - f(a_n))$,

pak parametrické rovnice tětivy jsou:
$$\begin{aligned} x &= a_n + (b_n - a_n)\cdot t \\ y &= f(a_n) + (f(b_n) - f(a_n))\cdot t \end{aligned}$$

a průsečík s osou $\boldsymbol{x}$:
$$\begin{aligned} x_n &= a_n + (b_n - a_n)\cdot t \\ 0 &= f(a_n) + (f(b_n) - f(a_n))\cdot t \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{-f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

$$x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$



Začátek CYKLU $$x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

Určíme funkční hodnotu $f(x_n)$; mohou nastat tři možnosti:

$f(x_n) = 0$ našli jsme kořen a ***výpočet ukončíme!***

$f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$ položíme $\boldsymbol{a}_{n+1} = a_n$, $\boldsymbol{b}_{n+1} = x_n$

$f(x_n) \cdot f(b_n) < 0$ položíme $\boldsymbol{a}_{n+1} = x_n$, $\boldsymbol{b}_{n+1} = b_n$ (obrázek pro $n = 0$)

Konec CYKLU neplatí-li zastavovací podmínka, cyklus opakujeme.

Hodnoty $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 2$ včetně aproximací kořene můžeme zapsat do následující tabulky.

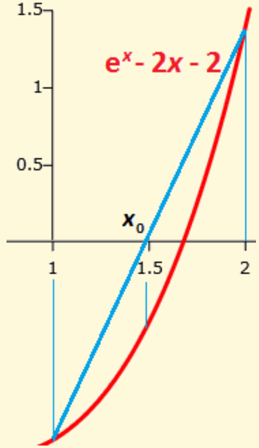
$a_0 = \mathbf{1}$

$f(a_0) = \mathrm{e}^1 - 2 \cdot 1 - 2 \doteq -1{,}282$

$b_0 = \mathbf{2}$

$f(b_0) = \mathrm{e}^2 - 2 \cdot 2 - 2 \doteq 1{,}39$

$$x_0 = \frac{1 \cdot 1{,}39 - 2 \cdot (-1{,}282)}{1{,}39 - (-1{,}282)} \doteq \mathbf{1{,}48}$$



Začátek CYKLU

$$x_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

Určíme funkční hodnotu $f(x_n)$; mohou nastat tři možnosti:

$f(x_n) = 0$ našli jsme kořen a ***výpočet ukončíme!***

$f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$ položíme $\boldsymbol{a}_{n+1} = a_n$, $\boldsymbol{b}_{n+1} = x_n$

$f(x_n) \cdot f(b_n) < 0$ položíme $\boldsymbol{a}_{n+1} = x_n$, $\boldsymbol{b}_{n+1} = b_n$ (obrázek pro $n = 0$)

Konec CYKLU neplatí-li zastavovací podmínka, cyklus opakujeme.

Hodnoty $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 2$ včetně aproximací kořene můžeme zapsat do následující tabulky.

$a_0 = \mathbf{1}$ $b_0 = \mathbf{2}$

$f(a_0) \doteq -1{,}282$ $f(b_0) \doteq 1{,}39$

$x_0 \doteq \mathbf{1{,}48}$

$f(x_0) \doteq -0{,}567$

$a_1 = \mathbf{1{,}48}$ $b_1 = \mathbf{2}$

$f(a_1) = -0{,}567$ $f(b_1) \doteq 1{,}39$

$x_1 \doteq \mathbf{1{,}631}$

Hodnoty $f(x) = e^x - 2x - 2$ můžeme zapsat do následující tabulky.

1 f(1) ≐-1,282	**2** f(2) ≐1,39
1,48 f(1,48) ≐-0,567	**2** f(2) ≐1,39
1,631 f(1,631) ≐-0,153	**2** f(2) ≐1,39
1,668 f(1,668) ≐-0,034	**2** f(2) ≐1,39
1,676 f(1,676) ≐-0,008	**2** f(2) ≐1,39
1,678 f(1,678) ≐-0,002	**2** f(2) ≐1,39
1,678 27 f(1,678 27) ≐-0,000 258	**2** f(2) ≐1,39
1,678 33 f(1,678 33) ≐-0,000 006	**2** f(2) ≐1,39

Aproximace kořene: 1,48 1,631 1,668 1,676 1,678 1,678 27 1,678 33 ...

Metoda tečen (Newtonova metoda) — kořen: $\beta \in (1\,;\,2)$

Tato metoda (pro svou rychlost se často užívá) vyžaduje, aby existovala derivace $f'(x)$. Newtonova metoda totiž využívá k nalezení kořenu rovnice $f(x) = 0$ tečny ke grafu funkce $\boldsymbol{f}$. ***Za členy posloupnosti*** $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, která konverguje ke kořenu β, ***volíme průsečík*** $[x_n\,;\,0]$ osy $\boldsymbol{x}$ s ***tečnou*** procházející bodem $[x_n\,;\,f(x_n)]$. Tato tečna má rovnici

$$y - f(x_n) = f'(x_n) \cdot (x - x_n)$$

a průsečík je potom:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Metoda nemusí konvergovat. Konvergence je zaručena, platí-li *Fourierovy podmínky* (viz [3, str. 21]):

$f(a) \cdot f(b) < 0$	existuje kořen
$f'(x) \neq 0$	funkce je ryze monotónní
$f''(x) \neq 0$	funkce je buď konkávní nebo konvexní

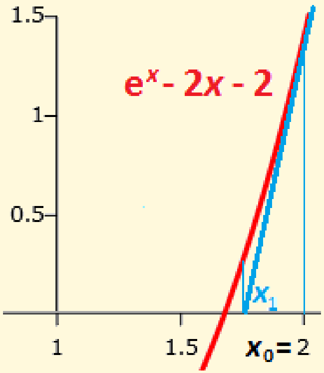
Pokud nejsou splněny Fourierovy podmínky a počáteční aproximace x_0 není dostatečně blízko kořene β, nemusí metoda konvergovat nebo může konvergovat k jinému kořenu.

Volba $\boldsymbol{x_0}$ Jako počáteční aproximaci kořene $\boldsymbol{x_0}$ volíme ten krajní bod $c \in \{a\,,\,b\}$ intervalu $(a\,,\,b)$, pro nějž platí $f(c) \cdot f''(c) > 0$.

V našem případě:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x - 2x - 2 & \qquad f(1) &= -1{,}282 \\ f'(x) &= e^x - 2 & f(2) &= 1{,}39 \\ f''(x) &= e^x & f''(x) &> 0 \quad \forall x \end{aligned}$$

Tedy volíme $\boldsymbol{x_0 = 2}$, protože: $f(2) \cdot f''(2) > 0$.



Počáteční aproximace $\boldsymbol{x_0 = 2}$

Začátek CYKLU $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ Určíme funkční hodnotu $f(x_{n+1})$.

Pokud $f(x_{n+1}) = 0$ našli jsme kořen a ***výpočet ukončíme!***

Pokud $f(x_{n+1}) \neq 0$ a …

Konec CYKLU … a pokud neplatí zastavovací podmínka, sestrojíme v bodě $[x_{n+1}\,;\,f(x_{n+1})]$ tečnu a cyklus opakujeme.

Výpočet pro $\begin{array}{l} f(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 2 \\ f'(x) = \mathrm{e}^x - 2 \end{array}$ můžeme zapsat do následující tabulky.

$x_0 = \mathbf{2}$ $\qquad f(x_0) \doteq 1{,}39$

$$x_1 = 2 - \frac{\mathrm{e}^2 - 2\cdot 2 - 2}{\mathrm{e}^2 - 2} \doteq \mathbf{1{,}742} \qquad f(x_1) \doteq 0{,}225$$

$$x_2 = 1{,}742 - \frac{\mathrm{e}^{1{,}742} - 2\cdot 1{,}742 - 2}{\mathrm{e}^{1{,}742} - 2} \doteq \mathbf{1{,}681\,4} \qquad f(x_2) \doteq 0{,}010$$

$$x_3 = 1{,}681\,4 - \frac{\mathrm{e}^{1{,}681\,4} - 2\cdot 1{,}681\,4 - 2}{\mathrm{e}^{1{,}681\,4} - 2} \doteq \mathbf{1{,}678\,354} \qquad f(x_3) \doteq 0{,}000\,023$$

$$x_4 = 1{,}678\,354 - \frac{\mathrm{e}^{1{,}678\,354} - 2\cdot 1{,}678\,354 - 2}{\mathrm{e}^{1{,}678\,354} - 2} \doteq \mathbf{1{,}678\,347} \qquad f(x_4) \doteq 0{,}000\,000\,034$$

Aproximace kořene: 2 1,742 1,681 4 1,678 354 1,678 347 …

Pro jinou počáteční aproximaci dostáváme:

f(	1	) =	-1,2817182		
f(	2,784	) =	8,6156262	x_1 =	2,784422382
f(	2,1766	) =	2,4630799	x_2 =	2,176565338
f(	1,81525	) =	0,5121116	x_3 =	1,815247484
f(	1,69163	) =	0,0450617	x_4 =	1,69162952
f(	1,678486	) =	0,000467	x_5 =	1,678486058
f(	1,678347	) =	6,708E-08	x_6 =	1,678347005

f(	0,9	) =	-1,3403969		
f(	3,816	) =	35,790156	x_1 =	3,816422575
f(	2,9918	) =	11,937909	x_2 =	2,991762807
f(	2,32568	) =	3,5822766	x_3 =	2,325678136
f(	1,890602	) =	0,8421507	x_4 =	1,890601702
f(	1,708451	) =	0,1035003	x_5 =	1,708450556
f(	1,67905	) =	0,0023626	x_6 =	1,679050449

f(	0,69	) =	-1,3862845		
f(	-219,899	) =	437,798	x_1 =	-219,8990365
f(	-1	) =	0,3678794	x_2 =	-1
f(	-0,7746	) =	0,0100881	x_3 =	-0,774600326
f(	-0,768046	) =	1,068E-05	x_4 =	-0,768045506

f(	0,7	) =	-1,3862473		
f(	101,498	) =	1,202E+44	x_1 =	101,4981371
f(	100,498	) =	4,423E+43	x_2 =	100,498
f(	99,498	) =	1,627E+43	x_3 =	99,498

Metoda sečen — kořen: $\alpha \in (-1\,;\,0)$

Newtonova metoda uvedená v předchozí kapitole je velmi rychlá, ale vyžaduje existenci derivace funkce $f(x)$ a v každém kroku výpočet hodnoty derivace $f'(x_n)$. V případech, kdy nám tento postup nevyhovuje, se proto často používá náhrada tečny za ***sečnu***. Sečnou rozumíme přímku, která prochází dvěma body grafu funkce $\boldsymbol{f}(x)$.

Tato metoda vyžaduje dva startovací body x_0, x_1, blízké kořenu α rovnice $f(x) = 0$. Nemusí nutně platit $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$, tedy kořen nemusí ležet mezi nimi.

Za členy posloupnosti $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, která konverguje ke kořenu α, ***volíme průsečík*** $[x_{n+1}\,;\,0]$ osy $\boldsymbol{x}$ se ***sečnou*** procházející body $[x_{n-1}\,;\,f(x_{n-1})]$, $[x_n\,;\,f(x_n)]$.

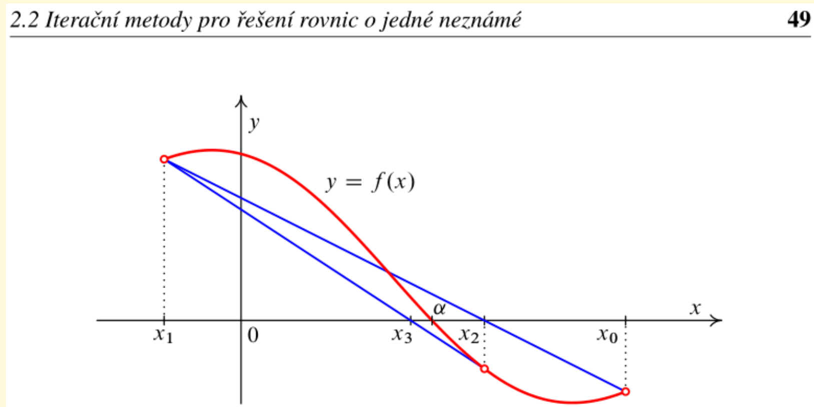
Tato sečna má rovnici

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \cdot (x - x_n)$$

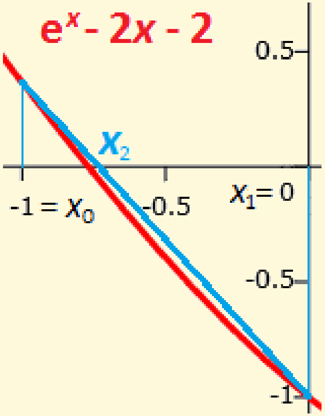
a průsečík je potom (viz obrázek z [8]):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

Předpokládáme, že jmenovatel je různý od nuly pro libovolné $n = 1, 2, 3, \ldots$



Metoda nemusí konvergovat. Konvergence je zaručena, pokud má funkce spojitou první a druhou derivaci, přičemž $f'(\alpha) \neq 0$ (kořen je jednoduchý), a pokud volíme počáteční aproximace x_0, x_1 blízko kořene α.



Počáteční aproximace $\boldsymbol{x}_0 = -1$ $\boldsymbol{x}_1 = 0$

Začátek CYKLU $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$

Určíme funkční hodnotu $f(x_{n+1})$.

Pokud $f(x_{n+1}) = 0$ našli jsme kořen a ***výpočet ukončíme!***

Pokud $f(x_{n+1}) \neq 0$ a ...

Konec CYKLU ... a pokud neplatí zastavovací podmínka, sestrojíme v bodech $[x_{n-1}\,;\,f(x_{n-1})]$ a $[x_n\,;\,f(x_n)]$ sečnu a cyklus opakujeme.

Výpočet pro $f(x) = \mathrm{e}^x - 2\,x - 2$ můžeme zapsat do následující tabulky.

$x_0 = -1$ $f(x_0) \doteq 0{,}368$

$x_1 = 0$ $f(x_1) = -1$

$$x_2 = 0 - \frac{0-(-1)}{\mathrm{e}^0 - 2\cdot 0 - 2 - [\mathrm{e}^{-1} - 2\cdot(-1) - 2]} \doteq \mathbf{-0{,}73} \qquad f(x_2) \doteq -0{,}058$$

$$x_3 = -0{,}73 - \frac{-0{,}73 - 0}{\mathrm{e}^{-0{,}058} - 2\cdot(-0{,}058) - 2 - [\mathrm{e}^0 - 2\cdot 0 - 2]} \doteq \mathbf{-0{,}775} \qquad f(x_3) \doteq 0{,}011$$

$$x_4 = -0{,}775 - \frac{-0{,}775-(-0{,}73)}{\mathrm{e}^{0{,}011} - 2\cdot 0{,}011 - 2 - [\mathrm{e}^{-0{,}058} - 2\cdot(-0{,}058) - 2]} \doteq \mathbf{-0{,}768} \qquad f(x_4) \doteq -0{,}000\,06$$

Aproximace kořene: -1 0 $-0{,}73$ $-0{,}775$ $-0{,}768$ ...

Pro jinou počáteční aproximaci dostáváme:

x_0	f(	-2	) =	2,1353353		
x_1	f(	-1	) =	0,3678794	x_2 =	-0,791859331
x_1	f(	-1	) =	0,3678794		
x_2	f(	-0,79	) =	0,0338448	x_3 =	-0,768722545
x_2	f(	-0,79	) =	0,0338448		
x_3	f(	-0,769	) =	0,0014763	x_4 =	-0,768042199
x_3	f(	-0,769	) =	0,0014763		
x_4	f(	-0,768	) =	-5,998E-05	x_5 =	-0,768039041
x_4	f(	-0,768	) =	-5,998E-05		
x_5	f(	-0,76804	) =	1,464E-06	x_6 =	-0,768039047
x_5	f(	-0,76804	) =	1,464E-06		
x_6	f(	-0,768039	) =	-7,222E-08	x_7 =	-0,768039047

x_0	f(	0	) =	-1		
x_1	f(	1	) =	-1,2817182	x_2 =	-3,549646778
x_1	f(	1	) =	-1,2817182		
x_2	f(	-3,55	) =	5,1287246	x_3 =	0,090262896
x_2	f(	-3,55	) =	5,1287246		
x_3	f(	0,09	) =	-1,0858257	x_4 =	-0,545992209
x_3	f(	0,09	) =	-1,0858257		
x_4	f(	-0,546	) =	-0,3287378	x_5 =	-0,822159753
x_4	f(	-0,546	) =	-0,3287378		
x_5	f(	-0,82216	) =	0,0838013	x_6 =	-0,766062094
x_5	f(	-0,82216	) =	0,0838013		
x_6	f(	-0,766062	) =	-0,003036	x_7 =	-0,768023288

Použitá literatura

[1] Čermák, L., Hlavička, R. *Numerické metody.* Obrazovková verze kapitoly 5, z: Čermák, L., Hlavička, R. *Numerické metody.* Skriptum, 2. vydání Brno : Fakulta strojního inženýrství VUT, 2008, 110 s. ISBN 978–80–214–3752–4. [on line] ⟨http://mathonline.fme.vutbr.cz/default.aspx?section=90⟩

[2] Černá, R., Machalický, M., Vogel, J., Zlatník, Č. *Základy numerické matematiky a programování.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, Celostátní vysokoškolská učebnice pro strojní, elektrotechnické a stavební fakulty vysokých škol technických, Praha 1987, 448 s.

[3] Dalík, J. *Matematika IV, Numerická analýza.* Brno : Fakulta stavební VUT, 2009, 130 s. [Dostupné z adresy:] ⟨https://intranet.fce.vutbr.cz/pedagog/predmety/opory.asp⟩

[4] Dávid, A. *Numerické metódy na osobnom počítači.* Bratislava : Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1988, 184 s.

[5] Diblík, J., Baštinec, J. *Matematika IV.* [skriptum] Brno : VUT, Fakulta elektrotechnická, 1991, 120 s. [Dostupné z adresy:] ⟨http://rschwarz.wz.cz/fast/DB_skripta.pdf⟩

[6] Fajmon, B., Růžičková, I. *Matematika 3.* Brno : Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, [on line] ⟨http://www.umat.feec.vutbr.cz/~hlavicka/skripta/matematika3.pdf⟩

[7] Kuben, J., Šarmanová, P. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Ostrava : Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2006, vi+346 s. ISBN 80–248–1192–8. [on line] ⟨http://homel.vsb.cz/~s1a64/cd/pdf/dp/dp_obr.pdf⟩

[8] Kuben, J., Račková, P. *Numerické metody.* Univerzita obrany, [Dostupné z adresy:] ⟨https://moodle.unob.cz/course/view.php?id=1169⟩

[9] Kučera, R., Morávková, Z. *Numerická matematika.* Vysoká škola báňská — Technická Univerzita Ostrava, ISBN: 978–80–248–3893–9. [on line] ⟨http://mdg.vsb.cz/portal/nm/nm.pdf⟩

[10] Míka, S. *Numerické metody algebry.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, Matematika pro vysoké školy technické, sešit IV, Praha, 1982, 176 s.

[11] Pospíšil, I., Vondrák, V. *Numerické metody I.* Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni, 2011, 191 s. [on line] ⟨http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf⟩

[12] Růžičková, I., Hlavička, R. *Numerické metody.* Brno : Fakulta strojního inženýrství VUT, [on line] ⟨http://physics.ujep.cz/~jskvor/NME/DalsiSkripta/Numerika.pdf⟩

[13] Strečko, O. *Desať kapitol z numerických, grafických a iných metod.* Bratislava : Alfa – Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1978, 1. vydanie, 328 s.