Interpolační polynom

- jedná se o nahrazení dané funkce $f(x)$ nějakým vhodným polynomem $P_n(x)$,
- základní členění interpolačních úloh:

Interpolační polynomy

Lagrangeova úloha interpolace

- dány **uzly** interpolace $x_0, x_1, \dots, x_n$
- v uzlech jsou předepsány hodnoty $y_0, y_1, \dots, y_n$
- hledáme interpolační polynom $P_n(x)$ stupně nejvýše n, který splňuje interpolační podmínky

$$P_n(x_i) = y_i \text{ pro } i = 0, 1, \dots, n.$$

Hermitova úloha interpolace

- dány **uzly** interpolace $x_0, x_1, \dots, x_n$
- v uzlech jsou předepsány hodnoty $y_0, y_1, \dots, y_n$ a navíc $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$
- hledáme interpolační polynom $P_n(x)$ stupně nejvýše n, který splňuje interpolační podmínky

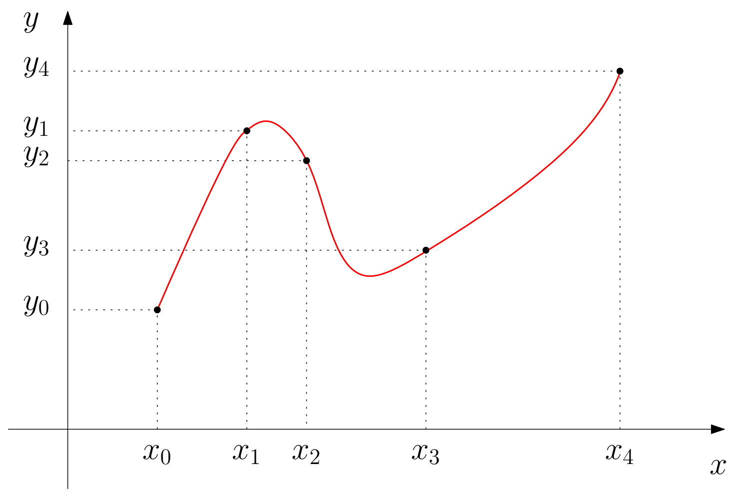
$$\begin{aligned} P_n(x_i) &= y_i \text{ pro } i = 0, 1, \dots, n, \\ P'_n(x_i) &= y'_i \text{ pro } i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Lagrangeův tvar polynomu

Newtonův tvar polynomu

v dalších ročnících

- předpokládáme, že uzly interpolace $x_0, x_1, \dots, x_n$ jsou různé (tj. $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$),
- ilustrace Lagrangeovy úlohy interpolace:



Interpolace = nahrazení <u>mezi</u> body x_0 a x_n

Lagrangeův tvar interpolačního polynomu

- polynom je ve tvaru

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_n\ell_n(x), \tag{$*$}$$

  kde $\ell_i(x)$ jsou tzv. **fundamentální polynomy** ve tvaru

$$\ell_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \tag{$**$}$$

- polynom $P_n(x)$ je dán jednoznačně,
- přidáme-li nový uzel x_{n+1}, musíme přepočítat všechny fundamentální polynomy :(

Newtonův tvar interpolačního polynomu

- polynom je ve tvaru

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \tag{$\clubsuit$}$$

- koeficienty $a_0, \dots, a_n$ lze obdržet postupným dosazováním uzlů do polynomu ($\clubsuit$),
- nebo pomocí poměrných diferencí:

ozn.	$P_{i0} := y_i$
pak	$P_{ik} := \frac{P_{i+1,k-1} - P_{i,k-1}}{x_{i+k} - x_i}$ pro $i = 0, 1, \dots$
$\rightarrow$	koeficienty se dostanou jako $a_i = P_{0i}$, $i = 0, 1, \dots, n$

- polynom $P_n(x)$ je dán jednoznačně,
- přidáme-li nový uzel x_{n+1}, stačí jen dopočítat koeficient a_{n+1} :)

★ !!Oba polynomy, Lagrangeův i Newtonův, jsou totožné, jen zapsané v jiném tvaru!!

Příklad 1: Určete Lagrangeův interpolační polynom (LIP) a Newtonův interpolační polynom (NIP) funkce, jejíž funkční hodnoty jsou dány v tabulce:

i	0	1	2
x_i	-1	2	3
y_i	2	0	5

Řešení. **(a)** Pro výpočet LIP nejprve určíme všechny fundamentální polynomy:

$$\begin{aligned}\ell_0 &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{1}{12}(x-2)(x-3),\\ \ell_1 &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -\frac{1}{3}(x+1)(x-3),\\ \ell_2 &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{4}(x+1)(x-2).\end{aligned}$$

LIP se dostane jako součet těchto fundamentálních polynomů dle $(*)$:

$$P_3(x) = \frac{1}{6}(x-2)(x-3) - 0 + \frac{5}{4}(x+1)(x-2).$$

Pro ověření správnosti LIP můžeme prověřit platnost interpolačních podmínek dosazením uzlů do polynomu:

$$\begin{aligned}P_3(-1) &= \frac{1}{6}\cdot(-3)\cdot(-4) = 2,\\ P_3(2) &= 0,\\ P_3(3) &= 0 + \frac{5}{4}\cdot 4\cdot 1 = 5.\end{aligned}$$

(b) NIP pomocí postupného dosazování uzlů:
Hledáme NIP ve tvaru podle (♣), tj. hledáme

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)(x-2).$$

Dosazením všech tří uzlů do tohoto polynomu se dostane soustava rovnic:

$$\begin{aligned}P_3(-1) &= a_0 \quad (= y_0 = 2),\\ P_3(2) &= a_0 + 3a_1 \quad (= y_1 = 0),\\ P_3(3) &= a_0 + 4a_1 + 4a_2 \quad (= y_2 = 5).\end{aligned}$$

Řešení této soustavy je zřejmě $a_0 = 2, a_1 = -\frac{2}{3}, a_2 = \frac{17}{12}$ a tedy NIP je ve tvaru

$$P_3(x) = 2 - \frac{8}{3}(x+1) + \frac{17}{12}(x+1)(x-2).$$

Opět můžeme správnost ověřit dosazením zadaných uzlů:

$$\begin{aligned}P_3(-1) &= 2,\\ P_3(2) &= 2 - \frac{2}{3}\cdot 3 = 0,\\ P_3(3) &= 2 - \frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{17}{12}\cdot 4\cdot 1 = 5.\end{aligned}$$

(c) Nyní určíme NIP pomocí tzv. poměrných diferencí. Nejprve zavedeme $P_{00} = 2, P_{10} = 0, P_{20} = 5$ a spočítáme P_{01}, P_{11}, P_{02}:

i	x_i	P_{i0}	P_{i1}	P_{i2}
0	-1	2	$\frac{0-2}{2-(-1)} = -\frac{2}{3}$	$\frac{5+\frac{2}{3}}{3-(-1)} = \frac{17}{12}$
1	2	0	$\frac{5-0}{3-2} = 5$	
2	3	5		

Opět se tak dostane $a_0 = 2, a_1 = -\frac{2}{3}, a_2 = \frac{17}{12}$.

$\square$

Příklad 2: Určete LIP a NIP funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ v uzlech $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Pomocí interpolačního polynomu odhadněte hodnotu $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

Řešení. Nejprve si určíme funkční hodnoty v zadaných uzlech:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	-0.7854	0	0.7854	1.1071

(a) Pro výpočet LIP určíme fundamentální polynomy:

$$\begin{aligned}
\ell_0 &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2), \\
\ell_1 &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2), \\
\ell_2 &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = -\frac{1}{2}(x+1)x(x-2), \\
\ell_3 &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{1}{6}(x+1)x(x-1).
\end{aligned}$$

LIP je pak ve tvaru:

$$P_3(x) = 0.1309x(x-1)(x-2) + 0 - 0.3927(x+1)x(x-2) + 0.1845(x+1)x(x-1).$$

Navíc máme určit hodnotu $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. Přesná hodnota podle kalkulačky je $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 0.463647609$. Dosazením do LIP máme aproximaci

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx= P_3(0.5) = 0.4216875.$$

(b) Koeficienty NIP určíme pomocí poměrných diferencí:

i	x_i	P_{i0}	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}
0	-1	-0.7854	$\frac{0-(-0.7854)}{0-(-1)} = 0.7854$	$\frac{0.7854-0.7854}{1-(-1)} = 0$	$\frac{-0.2319-0}{2-(-1)} = -0.0773$
1	0	0	$\frac{0.7854-0}{1-0} = 0.7854$	$\frac{0.3217-0.7854}{2-0} = -0.2319$	
2	1	0.7854	$\frac{1.1071-0.7854}{2-1} = 0.3217$		
3	2	1.1071			

□

Tedy hledané koeficienty jsou $a_0 = -0.7854, a_1 = 0.7854, a_2 = 0, a_3 = -0.0773$ a NIP je ve tvaru

$$P_3(x) = -0.7854 + 0.7854(x+1) - 0.0773(x+1)x(x-1).$$

Přibližná hodnota v bodě $\frac{1}{2}$ je $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx P_3(0.5) = 0.4216875$ (tj. stejná jako u LIP, protože oba polynomy jsou stejné).