# 2. INTERPOLAČNÍ POLYNOM

– Aproximace funkce $f$ polynomem $F$.
– Např. je-li funkce $f$ zadaná tabulkou (výsledky měření), nebo je-li výpočet funkčních hodnot funkce $f$ příliš složitý.
– Funkce $f$ a $F$ se shodují v daných bodech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $\quad\ldots$ **uzlové body**.

## LAGRANGEŮV TVAR

$\boldsymbol{L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + \cdots + y_n \cdot L_n(x)}$, kde

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{n-1})\cdot(x_i-x_n)}$$

Pro $n = 3$:

$$L(x) = y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Pro $n = 4$:

$$L(x) = y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) + y_4L_4(x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}$$
$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}$$
$$L_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}$$

## NEWTONŮV TVAR

$$\boldsymbol{N(x) = y_1 + y_{21}\cdot(x-x_1) + y_{321}\cdot(x-x_1)(x-x_2) + y_{4321}\cdot(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \ldots}$$

$$\begin{array}{llllll}
x_1 & y_1 & & & & \\
 & \searrow & & & & \\
 & & y_{21} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} & & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & \\
x_2 & y_2 & & & y_{321} = \dfrac{y_{32}-y_{21}}{x_3-x_1} & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
 & & y_{32} = \dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2} & & & y_{4321} = \dfrac{y_{432}-y_{321}}{x_4-x_1} \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\
x_3 & y_3 & & & y_{432} = \dfrac{y_{43}-y_{32}}{x_4-x_2} & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & y_{43} = \dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3} & & & \\
 & \nearrow & & & & \\
x_4 & y_4 & & & &
\end{array}$$

**Příklad:** Najděte interpolační polynom funkce $f$ užitím hodnot $y_i = f(x_i)$ v uzlech $x_i$ z tabulky.
a) Lagrangeův tvar, b) Newtonův tvar

| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 4 | 5 | 7 |
| $y_i$ | 3 | 2 | 0 |

LAGRANGEŮV TVAR INTERPOLAČNÍHO POLYNOMU

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-5)(x-7)}{(4-5)(4-7)} = \frac{x^2-12x+35}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-4)(x-7)}{(5-4)(5-7)} = \frac{x^2-11x+28}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-4)(x-5)}{(7-4)(7-5)} = \frac{x^2-9x+20}{6}$$

→ NENÍ TŘEBA POČÍTAT $y_3 = 0$

$$L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^2-12x+35}{3} + 2 \cdot \frac{x^2-11x+28}{-2} + 0 \cdot \frac{x^2-9x+20}{6}$$

$$= x^2 - 12x + 35 - x^2 + 11x - 28 = \underline{\underline{-x+7}}$$

NEWTONŮV TVAR INTERPOLAČNÍHO POLYNOMU

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 |
| 2 | 5 | 2 |
| 3 | 7 | 0 |

$$y_{21} = \frac{2-3}{5-4} = -1$$

$$y_{32} = \frac{0-2}{7-5} = -1$$

$$y_{321} = \frac{-1-(-1)}{7-4} = 0$$

$$N(x) = 3 + (-1)(x-4) + 0 \cdot (x-4)(x-5) = 3 - x + 4 = \underline{\underline{-x+7}}$$

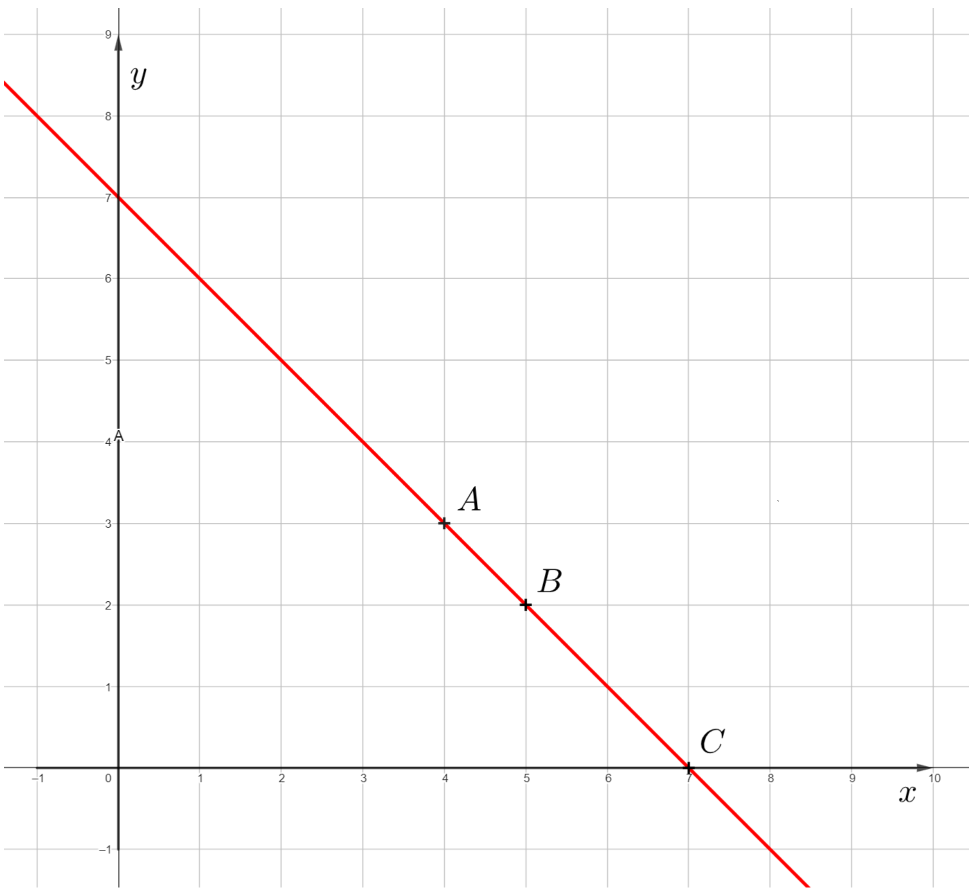
**Příklad:** Najděte interpolační polynom funkce $f$ užitím hodnot $y_i = f(x_i)$ v uzlech $x_i$ z tabulky.
a) Lagrangeův tvar, b) Newtonův tvar

| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 4 | 5 | 7 |
| $y_i$ | 3 | 2 | 0 |

POKRAČOVÁNÍ:

VÝHODA OPROTI LAGRANGEOVU TVARU:

1) JEDNODUŠŠÍ VÝPOČTY
2) POKUD PŘIDÁME DALŠÍ UZLOVÝ BOD $x_{n+1}$ RŮZNÝ OD VŠECH OSTATNÍCH, DŘÍVE SPOČÍTANÉ KOEFICIENTY SE NEZMĚNÍ A STAČÍ POUZE JEDEN DALŠÍ DOPOČÍTAT. LAGRANGEŮV TVAR BYCHOM MUSELI SESTROJOVAT CELÝ ZNOVU



**Příklad:** Najděte interpolační polynom funkce $f$ užitím hodnot $y_i = f(x_i)$ v uzlech $x_i$ z tabulky.
a) Lagrangeův tvar,  b) Newtonův tvar

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
| $y_i$ | $-4$ | $-1$ | $0$ | $5$ |

a) $L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) + y_4 \cdot L_4(x)$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)\overbrace{(x-1)(x-2)}^{x^2-3x+2}}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_2(x) = \frac{\overbrace{(x+1)(x-1)}^{x^2-1}(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)\overbrace{(x-0)\ (x-2)}^{x^2-x-2}}{(1+1)(1-0)(1-2)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

→ NENÍ TŘEBA POČÍTAT, $y_3 = 0$

$$L_4(x) = \frac{\overbrace{(x+1)(x-0)(x-1)}^{x^2-1}}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{x^3-x}{6}$$

$$L(x) = -\cancel{4}^{\,2} \cdot \frac{x^3-3x^2+2x}{-\cancel{6}\,3} - 1 \cdot \frac{x^3-2x^2-x+2}{2} + 0 \cdot \frac{x^3-x^2-2x}{-2} + 5 \cdot \frac{x^3-x}{6}$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x = \underline{\underline{x^3 - x^2 + x - 1}}$$

b) $N(x) = y_1 + y_{21}(x-x_1) + y_{321}(x-x_1)(x-x_2) + y_{4321}(x-1)(x-2)(x-3)$

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 1 | $-1$ | $-4$ |
| 2 | $0$ | $-1$ |
| 3 | $1$ | $0$ |
| 4 | $2$ | $5$ |

$$y_{21} = \frac{-1+4}{0+1} = 3 \qquad y_{32} = \frac{0+1}{1-0} = 1 \qquad y_{43} = \frac{5-0}{2-1} = 5$$

$$y_{321} = \frac{1-3}{1+1} = -1 \qquad y_{432} = \frac{5-1}{2-0} = 2$$

$$y_{4321} = \frac{2+1}{2+1} = 1$$

$$N(x) = -4 + 3(x+1) - 1(x+1)(x-0) + 1(x+1)(x-0)(x-1) =$$
$$= -4 + 3x + 3 - x^2 - x + x^3 - x = \underline{\underline{x^3 - x^2 + x - 1}}$$

**Příklad:** Najděte interpolační polynom funkce $f$ užitím hodnot $y_i = f(x_i)$ v uzlech $x_i$ z tabulky.
a) Lagrangeův tvar, b) Newtonův tvar

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
| $y_i$ | $-4$ | $-1$ | 0 | 5 |