

Josef Čížek

Numerické derivace



Teoretický úvod

Numerické derivace slouží pro aproximaci derivace dané funkce. Tato metoda se používá v případech, kdy je derivovaná funkce zadána pouze tabulkou, nebo pokud je výpočet přesné hodnoty derivace příliš pracný.

Hodnotu derivace funkce počítáme v uzlech s krokem h .

Funkci $f(t)$ nahrazujeme:

- a) Newtonovým interpolačním polynomem

$$P_+(t) = f(x) + f(x, x+h) * (t-x)$$

V uzlech x a $x+h$, získáme aproximaci

$$f'(x) \doteq \frac{dP_+}{dt} = f(x, x+h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Tuto nazýváme **diference směrem dopředu**.

- b) Newtonovým interpolačním polynomem

$$P_-(t) = f(x-h) + f(x-h, x) * (t-x+h)$$

V uzlech $x-h$ a x , získáme aproximaci

$$f'(x) \doteq \frac{dP_-}{dt} = f(x-h, x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Tuto nazýváme **diference směrem dozadu**.

- c) Newtonovým interpolačním polynomem

$$P_2(t) = f(x-h) + f(x-h, x) * (t-x+h) + f(x-h, x, x+h) * (t-x+h) * (t-x)$$

V uzlech $x-h$, x a $x+h$ získáme aproximaci

$$f'(x) \doteq \frac{dP_2}{dt}(x) = \frac{f(x, x+h) + f(x-h, x)}{2} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Tuto nazýváme **centrální diference**.

Pro výpočet aproximace druhé derivace použijeme Newtonův interpolační polynom $P_2(t)$.
Následně získáme vzorec:

$$f''(x) \doteq \frac{d^2P_2}{dt^2} = 2f(x-h, x, x+h) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Tuto aproximaci nazýváme **druhá centrální diference**.

U goniometrických funkcí budeme počítat v radiánech.

Příklad 1

$$f(x) = e^{2x} + 2x$$

$$h = 0,5$$

i	0	1	2
x_i	-0,5	0	0,5
$f(x_i)$	-0,63212	1	3,71828

Výpočet aproximace derivace funkce v daných uzlech.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{1 - (-0,63212)}{0,5} = 3,26424$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{3,71828 - (-0,63212)}{1} = 4,3504$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{3,71828 - 1}{0,5} = 5,43656$$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= \frac{f'(x_2) - f'(x_0)}{h} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h^2} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h^2} = \frac{f(x_2) - f(x_1) - f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \\ &= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \frac{3,71828 - 2 + (-0,63212)}{0,25} = 4,34464 \end{aligned}$$

Výpočet přesné hodnoty derivace funkce v daných uzlech.

$$f'^* = 2(e^{2x} + 1)$$

i	0	1	2
x_i	-0,5	0	0,5
$f'^*(x_i)$	2,73576	4	7,43656

$$f''^* = 4e^{2x}$$

i	0	1	2
x_i	-0,5	0	0,5
$f''^*(x_i)$	-	4	-

Chyba aproximace derivace:

$$|f'(x_0) - f'^*| = |3,26424 - 2,73576| = 0,52848$$

$$|f'(x_1) - f'^*| = |4,3504 - 4| = 0,3504$$

$$|f'(x_2) - f'^*| = |5,43656 - 7,43656| = 2$$

$$|f''(x_1) - f''^*| = |4,34464 - 4| = 0,34464$$

Příklad 2

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$h = 0,25$$

i	0	1	2	3
x_i	-0,25	0,00	0,25	0,5
$f(x_i)$	0,939413	1	0,939413	0,778801

Výpočet aproximace derivace funkce v daných uzlech.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{1 - 0,939413}{0,25} = 0,242348$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{0,939413 - 0,939413}{0,5} = 0$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{0,778801 - 1}{0,5} = -0,442398$$

$$f'(x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{0,778801 - 0,939413}{0,25} = -0,642448$$

$$f''(x_1) = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \frac{0,939413 - 2 + 0,939413}{0,0625} = -1,938784$$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{0,778801 - 2 * 0,939413 + 1}{0,0625} = -1,6004$$

Výpočet přesné hodnoty derivace funkce v daných uzlech.

$$f'^* = -2e^{-x^2} * x$$

i	0	1	2	3
x_i	-0,25	0,00	0,25	0,5
$f'^*(x_i)$	0,4697065	0	-0,46971	-0,778801

$$f''^* = e^{-x^2} * (4x^2 - 2)$$

i	0	1	2	3
x_i	-0,25	0,00	0,25	0,5
$f''^*(x_i)$	-	-2	-1,64397	-

Chyba aproximace derivace:

$$|f'(x_0) - f'^*| = 0,2273585$$

$$|f'(x_3) - f'^*| = 0,136353$$

$$|f'(x_1) - f'^*| = 0$$

$$|f'(x_1) - f''^*| = 0,061216$$

$$|f'(x_2) - f'^*| = 0,027312$$

$$|f'(x_2) - f''^*| = 0,04357$$

Příklad 3

$$f(x) = \sin(2x)$$

$$h = 0,25$$

i	0	1	2
x_i	0,25	0,5	0,75
$f(x_i)$	0,479426	0,841471	0,997495

Výpočet aproximace derivace funkce v daných uzlech.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{0,841471 - 0,479426}{0,25} = 1,44818$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{0,997495 - 0,479426}{0,5} = 1,036138$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{0,997495 - 0,841471}{0,25} = 0,624096$$

$$f''(x_1) = \frac{f'(x_2) - f'(x_0)}{h} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h^2} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h^2} = \frac{f(x_2) - f(x_1) - f(x_1) + f(x_0)}{h^2} =$$

$$= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \frac{0,997495 - 2 * 0,841471 + 0,479426}{0,0625} = -3,296336$$

Výpočet přesné hodnoty derivace funkce v daných uzlech.

$$f'^* = 2 \cos(2x)$$

i	0	1	2
x_i	0,25	0,5	0,75
$f'^*(x_i)$	1,755165	1,080605	0,141474

$$f''^* = -4\sin(2x)$$

i	0	1	2
x_i	0,25	0,5	0,75
$f''^*(x_i)$	-	-3,36588	-

Chyba aproximace derivace:

$$|f'(x_0) - f'^*| = 0,306985$$

$$|f'(x_2) - f'^*| = 0,482622$$

$$|f'(x_1) - f'^*| = 0,044467$$

$$|f''(x_1) - f''^*| = 0,069544$$

Příklad 4

$$f(x) = 3 + \sin\left(\frac{1}{3}x\right) \quad h = 1$$

i	0	1	2
x_i	-1	0,00	1,00
$f(x_i)$	2,672805	3	3,327195

Výpočet aproximace derivace funkce v daných uzlech.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{3 - 2,672805}{1} = 0,327195$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{3,327195 - 2,672805}{2} = 0,65439$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{3,327195 - 3}{1} = 0,327195$$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= \frac{f'(x_2) - f'(x_0)}{h} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h^2} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h^2} = \frac{f(x_2) - f(x_1) - f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \\ &= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \frac{3,327195 - 2 * 3 + 2,672805}{1} = 0 \end{aligned}$$

Výpočet přesné hodnoty derivace funkce v daných uzlech.

$$f'' = \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3}$$

i	0	1	2
x_i	-1	0,00	1,00
$f''(x_i)$	0,3149856	0,3333333	0,3149856

$$f''' = -\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3}$$

i	0	1	2
x_i	-1	0,00	1,00
$f'''(x_i)$	-	0	-

Chyba aproximace derivace:

$$|f'(x_0) - f''| = 0,0122094$$

$$|f'(x_2) - f''| = 0,0122094$$

$$|f'(x_1) - f''| = 0,3210567$$

$$|f''(x_1) - f'''| = 0$$

Příklad 5

$$f(x) = x * \arctan x$$

$$h = 0,25$$

i	0	1	2	3
x_i	0,25	0,5	0,75	1,00
$f(x_i)$	0,061245	0,231824	0,482626	0,785398

Výpočet aproximace derivace funkce v daných uzlech.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{0,231824 - 0,061245}{0,25} = 0,682316$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{0,482626 - 0,061245}{0,5} = 0,842762$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{0,785398 - 0,231824}{0,5} = 1,107148$$

$$f'(x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{0,785398 - 0,482626}{0,25} = 1,211088$$

$$f''(x_1) = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \frac{0,482626 - 2 * 0,231824 + 0,061245}{0,0625} = 1,283568$$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{0,785398 - 2 * 0,482626 + 0,231824}{0,0625} = 0,83152$$

Výpočet přesné hodnoty derivace funkce v daných uzlech.

$$f'' = \frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x$$

i	0	1	2	3
x_i	0,25	0,5	0,75	1,00
$f''(x_i)$	0,480273	0,863648	1,123501	1,285398

$$f''' = \frac{2}{(x^2 + 1)^2}$$

i	0	1	2	3
x_i	0,25	0,5	0,75	1,00
$f'''(x_i)$	-	1,28	0,8192	-

Chyba aproximace derivace:

$$|f'(x_0) - f''| = 0,202043$$

$$|f'(x_3) - f''| = 0,07431$$

$$|f'(x_1) - f''| = 0,020886$$

$$|f'(x_1) - f'''| = 0,003568$$

$$|f'(x_2) - f''| = 0,016353$$

$$|f'(x_2) - f'''| = 0,01232$$

Příklad 6

$$f(x) = x^2 * \ln x$$

$$h = 0,25$$

i	0	1	2
x_i	0,75	1,00	1,25
$f(x_i)$	-0,16182	0	0,348662

Výpočet aproximace derivace funkce v daných uzlech.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{0 - (-0,16182)}{0,25} = 0,64728$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{0,348662 - (-0,16182)}{0,5} = 1,020964$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{0,348662 - 0}{0,25} = 1,394648$$

$$f''(x_1) = \frac{f'(x_2) - f'(x_0)}{h} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h^2} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h^2} = \frac{f(x_2) - f(x_1) - f(x_1) + f(x_0)}{h^2} =$$

$$= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \frac{0,348662 - 2 * 0 + (-0,16182)}{0,0625} = 2,989472$$

Výpočet přesné hodnoty derivace funkce v daných uzlech.

$$f'^* = 2x * \ln x + x$$

i	0	1	2
x_i	0,75	1,00	1,25
$f'^*(x_i)$	0,318477	1	1,807859

$$f''^* = 2 \ln x + 3$$

i	0	1	2
x_i	0,75	1,00	1,25
$f''^*(x_i)$	-	3	-

Chyba aproximace derivace:

$$|f'(x_0) - f'^*| = 0,328803$$

$$|f'(x_2) - f'^*| = 0,413211$$

$$|f'(x_1) - f'^*| = 0,0200964$$

$$|f''(x_1) - f''^*| = 0,010528$$

Příklad 7

$$f(x) = \sin x * \arctan x$$

$$h = 0,5$$

i	0	1	2
x_i	0,00	0,5	1,00
$f(x_i)$	0	0,222285	0,66089

Výpočet aproximace derivace funkce v daných uzlech.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{0,222285 - 0}{0,5} = 0,44457$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{0,66089 - 0}{1} = 0,66089$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{0,66089 - 0,222285}{0,5} = 0,87721$$

$$f''(x_1) = \frac{f'(x_2) - f'(x_0)}{h} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h^2} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h^2} = \frac{f(x_2) - f(x_1) - f(x_1) + f(x_0)}{h^2} =$$

$$= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \frac{0,66089 - 2 * 0,222285 + 0}{0,25} = 0,86528$$

Výpočet přesné hodnoty derivace funkce v daných uzlech.

$$f'^* = \frac{\sin x}{x^2 + 1} + \cos x * \arctan x$$

i	0	1	2
x_i	0,00	0,5	1,00
$f'^*(x_i)$	0	0,790429	0,845088

$$f'^* = \frac{2((x^2 + 1) * \cos x - x * \sin x)}{(x^2 + 1)^2} - \sin x * \arctan x$$

i	0	1	2
x_i	0,00	0,5	1,00
$f''^*(x_i)$	-	0,875015	-

Chyba aproximace derivace:

$$|f'(x_0) - f'^*| = 0,44457$$

$$|f'(x_2) - f'^*| = 0,032122$$

$$|f'(x_1) - f'^*| = 0,129539$$

$$|f''(x_1) - f''^*| = 0,009735$$

Příklad 8

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$h = 0,25$$

i	0	1	2	3
x_i	0,00	0,25	0,5	0,75
$f(x_i)$	1	0,968246	0,866025	0,661438

Výpočet aproximace derivace funkce v daných uzlech.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{0,968246 - 1}{0,25} = -0,031754$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{0,866025 - 1}{0,5} = -0,26795$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{0,661438 - 0,968246}{0,5} = -0,613616$$

$$f'(x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{0,661438 - 0,866025}{0,25} = -0,818348$$

$$f''(x_1) = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \frac{0,866025 - 2 * 0,968246 + 1}{0,0625} = -1,127472$$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{0,661438 - 2 * 0,866025 + 0,968246}{0,0625} = -1,637856$$

Výpočet přesné hodnoty derivace funkce v daných uzlech.

$$f'^* = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

i	0	1	2	3
x_i	0,00	0,25	0,5	0,75
$f'^*(x_i)$	0	-0,2582	-0,57735	-1,13389

$$f''^* = -\frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}$$

i	0	1	2	3
x_i	0,00	0,25	0,5	0,75
$f''^*(x_i)$	-	-1,10165	-1,5396	-

Chyba aproximace derivace:

$$|f'(x_0) - f'^*| = 0,031754$$

$$|f'(x_3) - f'^*| = 0,315542$$

$$|f'(x_1) - f'^*| = 0,00975$$

$$|f'(x_1) - f''^*| = 0,025822$$

$$|f'(x_2) - f'^*| = 0,036266$$

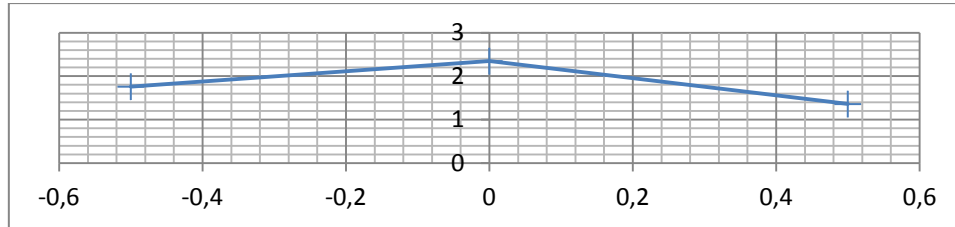
$$|f'(x_2) - f''^*| = 0,098256$$

Příklad 9

Funkce $f(x)$ je zadána tabulkou.

$$h = 0,5$$

i	0	1	2
x_i	-0,5	0	0,5
$f(x_i)$	1,7586	2,34571	1,3582



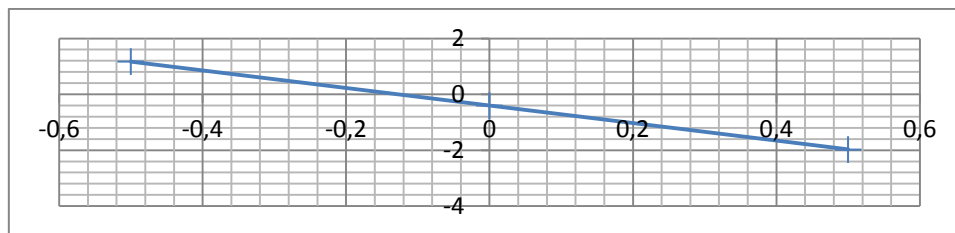
Výpočet aproximace derivace funkce v daných uzlech.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{2,34571 - 1,7586}{0,5} = 1,17422$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{1,3582 - 1,7586}{1} = -0,4004$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{1,3582 - 2,34571}{0,5} = -1,97502$$

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= \frac{f'(x_2) - f'(x_0)}{h} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h^2} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h^2} = \frac{f(x_2) - f(x_1) - f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \\ &= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \frac{1,3582 - 2 * 2,34571 + 1,7586}{0,25} = -6,29848 \end{aligned}$$

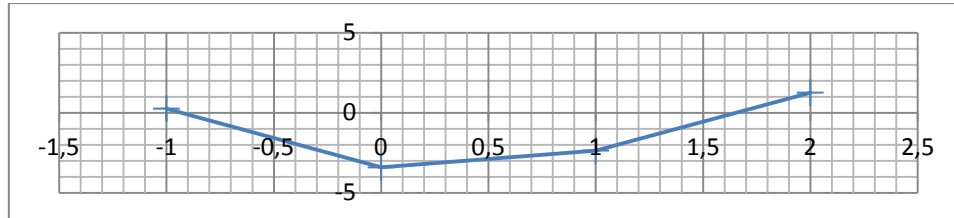


Příklad 10

Funkce $f(x)$ je zadána tabulkou.

$$h = 1$$

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0,2584	-3,412	-2,361	1,258



Výpočet aproximace derivace funkce v daných uzlech.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = \frac{-3,412 - 0,2584}{1} = -3,6704$$

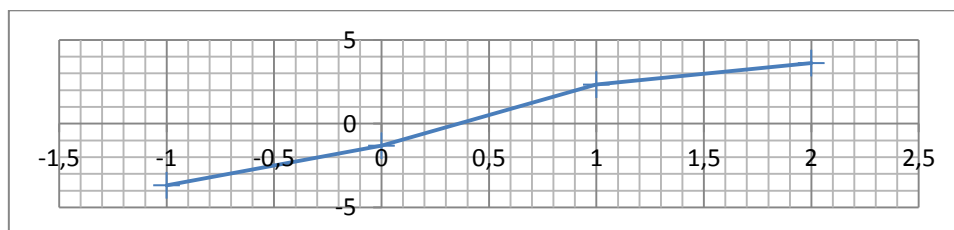
$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} = \frac{-2,361 - 0,2584}{2} = -1,3097$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{1,258 - (-3,412)}{2} = 2,335$$

$$f'(x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{1,258 - (-2,361)}{1} = 3,619$$

$$f''(x_1) = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} = \frac{-2,361 - 2 * (-3,412) + 0,2584}{1} = 4,7214$$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{1,258 - 2 * (-2,361) + (-3,412)}{1} = 2,568$$



Seznam použité literatury

[1] Dalík, J.: Numerické metody, Akademické nakladatelství CERM s.r.o. Brno, Brno 1997

Za spolupráce a pod vedením Mgr. Ireny Hinterleitner, Ph.D., které tímto děkuji.

V Brně 2016