Numerické derivování

- definice derivace

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{$*$}$$

- přibližný výpočet derivace se používá hlavně v případech, kdy:
  - pro dané x jsou zadány hodnoty $y = f(x)$, ale funkce $f(x)$ není známá,
  - funkce $f(x)$ je příliš složitá a analytický výpočet derivace je příliš pracný nebo nemožný.
- uvažujeme uzly $x_0, x_1, \ldots, x_n$ s ekvidistantním krokem h, tj.

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, \ldots, n,$$

- základní používané formule:

  a) první dopředná diference

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

  b) první zpětná diference

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

  c) první centrální diference

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

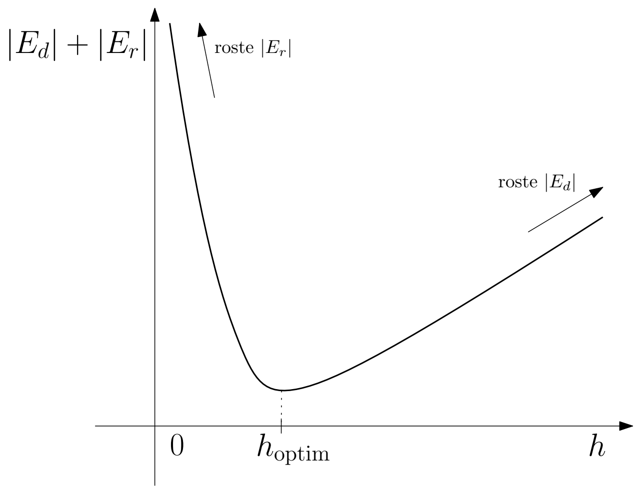
  d) druhá centrální diference

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2},$$

- při numerické výpočtu derivace se dopouštíme dvojího typu chyb:

  i) aproximací derivace pomocí výše uvedených formulí - tzv. diskretizační chyba, ozn. E_d,

  ii) zaokrouhlováním hodnot $f(x), f(x+h)$ apod. - tzv. zaokrouhlovací chyba, ozn. E_r.



Tedy ke zpřesnění derivace není vhodné extrémně zmenšovat krok h!

Příklad 1: Určete numerické derivace funkce $f(x) = \ln\sqrt{x}$ v bodě $x = 2$ pomocí všech tří základních formulí s krokem (a) $h = 0.1$, (b) $h = 0.01$, (c) $h = 0.001$. Zaokrouhlujte na 9 desetinných míst a výsledky porovnejte s přesnou hodnotou $f'(2)$.

Řešení. Nejprve určíme přesné řešení:

$$f'(x) = \frac{1}{2x},$$

tj. $f'(2) = 0.25$. Dále určíme numerické derivace pomocí formulí dopředné, zpětné a centrální diference:

h	dopředná	zpětná	centrální
0.1	0.243950821	0.256466472	0.250208646
0.01	0.249377076	0.250627091	0.250002083
0.001	0.249937521	0.250062521	0.250000021

□