FAKULTA STAVEBNÍ
ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Matematika 1

Numerické derivování

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši
nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2016

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

Úvod

V praxi se stává, že o nějaké funkci víme jen to, že nabývá několika hodnot, které jsme získali experimentálně. Přesto požadujeme znát i hodnoty derivace této funkce alespoň v některých (ne nutně experimentálně zjištěných) bodech. Nezbývá, než potřebné hodnoty derivace nějak odhadnout. Nejčastěji to provádíme tak, že zadanými body proložíme interpolační mnohočlen a hledané derivace nahradíme derivacemi tohoto mnohočlenu.

Uvedený postup si ukažme na jednoduchém příkladu, který je schválně volen tak, aby bylo možné výsledky získané interpolačními mnohočleny porovnat s přesnou hodnotou derivace v daném bodě.

Příklad: jsou zadány dva uzlové body (funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}032$)

Odhadněte hodnotu derivace *neznámé funkce* $f(x)$ pro $x = -1{,}5$
/tedy $f'(-1{,}5) = ?$/ pouze na základě těchto informací:

x	-2	-1
$f(x)$	$-0{,}6$	0

Řešení: Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Lagrangeově tvaru:

Úvod

V praxi se stává, že o nějaké funkci víme jen to, že nabývá několika hodnot, které jsme získali experimentálně. Přesto požadujeme znát i hodnoty derivace této funkce alespoň v některých (ne nutně experimentálně zjištěných) bodech. Nezbývá, než potřebné hodnoty derivace nějak odhadnout. Nejčastěji to provádíme tak, že zadanými body proložíme interpolační mnohočlen a hledané derivace nahradíme derivacemi tohoto mnohočlenu.

Uvedený postup si ukažme na jednoduchém příkladu, který je schválně volen tak, aby bylo možné výsledky získané interpolačními mnohočleny porovnat s přesnou hodnotou derivace v daném bodě.

Příklad: jsou zadány dva uzlové body (funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}032$)

Odhadněte hodnotu derivace *neznámé funkce* $f(x)$ pro $x = -1{,}5$
/tedy $f'(-1{,}5) = ?$/ pouze na základě těchto informací:

x	-2	-1
$f(x)$	$-0{,}6$	0

Řešení: Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Lagrangeově tvaru:

$$\boldsymbol{L}(x) = -0{,}6 \cdot \frac{x-(-1)}{-2+1} + 0 \cdot \frac{x-(-2)}{-1+2} = 0{,}6 \cdot (x+1) \qquad \Longrightarrow \qquad L'(x) = (0{,}6\,x + 0{,}6)' = 0{,}6$$

Úvod

V praxi se stává, že o nějaké funkci víme jen to, že nabývá několika hodnot, které jsme získali experimentálně. Přesto požadujeme znát i hodnoty derivace této funkce alespoň v některých (ne nutně experimentálně zjištěných) bodech. Nezbývá, než potřebné hodnoty derivace nějak odhadnout. Nejčastěji to provádíme tak, že zadanými body proložíme interpolační mnohočlen a hledané derivace nahradíme derivacemi tohoto mnohočlenu.

Uvedený postup si ukažme na jednoduchém příkladu, který je schválně volen tak, aby bylo možné výsledky získané interpolačními mnohočleny porovnat s přesnou hodnotou derivace v daném bodě.

Příklad: jsou zadány dva uzlové body (funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}032$)

Odhadněte hodnotu derivace *neznámé funkce* $f(x)$ pro $x = -1{,}5$
/tedy $f'(-1{,}5) = ?$/ pouze na základě těchto informací:

x	-2	-1
$f(x)$	$-0{,}6$	0

Řešení: Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Lagrangeově tvaru:

$$\boldsymbol{L}(x) = -0{,}6 \cdot \frac{x-(-1)}{-2+1} + 0 \cdot \frac{x-(-2)}{-1+2} = 0{,}6 \cdot (x+1) \qquad \Longrightarrow \qquad L'(x) = (0{,}6\,x + 0{,}6)' = 0{,}6$$

A potom: $\boldsymbol{f}'(-1{,}5) \approx \boldsymbol{L}'(-1{,}5) = 0{,}6$. Přičemž $\boldsymbol{f}'(-1{,}5) = -\frac{4\cdot(-1{,}5)}{[1+(-1{,}5)^2]^2} = 0{,}568\,047$,

$$\text{protože} \quad \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{(1-x^2)'(1+x^2)-(1-x^2)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{-2\,x\cdot(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2\,x}{(1+x^2)^2}$$

Příklad: jsou zadány tři uzlové body **(funkce** $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ **, chyba:** $\Delta \doteq -0{,}032$**)**

Máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe tři hodnoty.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f}'(-1{,}5)$ pouze na základě těchto informací:

x	-2	-1	0
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1

Řešení Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

Příklad: jsou zadány tři uzlové body (funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}032$)

Máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe tři hodnoty.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f}'(-1{,}5)$ pouze na základě těchto informací:

x	-2	-1	0
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1

Řešení Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

$$\begin{array}{ccccc}
-2 & & -1 & & 0 \\
\hline
-0{,}6 & & 0 & & 1 \\
 & \dfrac{0-(-0{,}6)}{-1-(-2)} = 0{,}6 & & \dfrac{1-0}{0-(-1)} = 1 & \\
 & & \dfrac{1-0{,}6}{0-(-2)} = 0{,}2 & &
\end{array}$$

Příklad: jsou zadány tři uzlové body (funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}032$)

Máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe tři hodnoty.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f}'(-1{,}5)$ pouze na základě těchto informací:

x	-2	-1	0
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1

Řešení Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

$$\begin{array}{ccccc} -2 & & -1 & & 0 \\ \hline -0{,}6 & & 0 & & 1 \\ & \dfrac{0-(-0{,}6)}{-1-(-2)} = 0{,}6 & & \dfrac{1-0}{0-(-1)} = 1 & \\ & & \dfrac{1-0{,}6}{0-(-2)} = 0{,}2 & & \end{array}$$

$$N(x) = -0{,}6 + 0{,}6 \cdot [x-(-2)] + 0{,}2 \cdot (x+2) \cdot [x-(-1)] = -0{,}6 + 0{,}6 \cdot (x+2) + 0{,}2 \cdot (x^2 + x + 2x + 2) =$$

$$= 0{,}2\,x^2 + [0{,}6 + 0{,}2 \cdot 3] \cdot x + (-0{,}6 + 0{,}6 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 2) = \mathbf{0{,}2\,x^2 + 1{,}2\,x + 1}$$

Příklad: jsou zadány tři uzlové body (funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}032$)

Máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe tři hodnoty.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f}'(-1{,}5)$ pouze na základě těchto informací:

x	-2	-1	0
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1

Řešení Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

$$
\begin{array}{ccccc}
-2 & & -1 & & 0 \\
\hline
-0{,}6 & & 0 & & 1 \\
 & \dfrac{0-(-0{,}6)}{-1-(-2)} = 0{,}6 & & \dfrac{1-0}{0-(-1)} = 1 & \\
 & & \dfrac{1-0{,}6}{0-(-2)} = 0{,}2 & &
\end{array}
$$

$$N(x) = -0{,}6 + 0{,}6 \cdot [x-(-2)] + 0{,}2 \cdot (x+2) \cdot [x-(-1)] = -0{,}6 + 0{,}6 \cdot (x+2) + 0{,}2 \cdot (x^2 + x + 2x + 2) =$$

$$= 0{,}2\,x^2 + [0{,}6 + 0{,}2 \cdot 3] \cdot x + (-0{,}6 + 0{,}6 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 2) = 0{,}2\,x^2 + 1{,}2\,x + 1$$

$$N'(x) = (0{,}2\,x^2 + 1{,}2\,x + 1)' = 0{,}4\,x + 1{,}2$$

$$\boldsymbol{f}'(-1{,}5) \approx \boldsymbol{N}'(-1{,}5) = 0{,}4 \cdot (-1{,}5) + 1{,}2 = 0{,}6$$

Což je naprosto stejný výsledek, jako když jsme měli zadány pouze dva body. Odhad hodnoty derivace se v tomto případě nezhoršil.

Zkusme proto přidat další bod, zda dostaneme lepší odhad.

Příklad: jsou zadány čtyři uzlové body (funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}132$)

Opět máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe čtyři hodnoty.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f'}(-1{,}5)$ když znáte:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1	0

Řešení: Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

Příklad: jsou zadány čtyři uzlové body **(funkce** $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ **, chyba:** $\Delta \doteq -0{,}132$**)**

Opět máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe čtyři hodnoty.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f}'(-1{,}5)$ když znáte:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1	0

Řešení: Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

$$
\begin{array}{ccccccc}
-2 & & -1 & & 0 & & 1 \\
\hline
-0{,}6 & & 0 & & 1 & & 0 \\
& 0{,}6 & & 1 & & \frac{0-1}{1-0} = -1 & \\
& & 0{,}2 & & \frac{-1-1}{1-(-1)} = -1 & & \\
& & & \frac{-1-0{,}2}{1-(-2)} = \color{red}{-0{,}4} & & &
\end{array}
$$

Příklad: jsou zadány čtyři uzlové body (funkce $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}132$)

Opět máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe čtyři hodnoty.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f}'(-1{,}5)$ když znáte:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1	0

Řešení: Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

$$\begin{array}{ccccccc}
-2 & & -1 & & 0 & & 1 \\ \hline
-0{,}6 & & 0 & & 1 & & 0 \\
 & 0{,}6 & & 1 & & \dfrac{0-1}{1-0}=-1 & \\
 & & 0{,}2 & & \dfrac{-1-1}{1-(-1)}=-1 & & \\
 & & & \dfrac{-1-0{,}2}{1-(-2)}=\color{red}{-0{,}4} & & &
\end{array}$$

$$N(x)=\color{magenta}{0{,}2\,x^2+1{,}2\,x+1}-0{,}4\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-0)=$$

$$=0{,}2\,x^2+1{,}2\,x+1-0{,}4\cdot(x^3+3\,x^2+2\,x)=\mathbf{-0{,}4\,x^3-x^2+0{,}4\,x+1}$$

Příklad: jsou zadány čtyři uzlové body (funkce $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}132$)

Opět máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe čtyři hodnoty.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f'}(-1{,}5)$ když znáte:

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1	0

Řešení: Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

-2		-1			0		1
$-0{,}6$		0			1		0
	$0{,}6$		1			$\frac{0-1}{1-0}=-1$	
		$0{,}2$		$\frac{-1-1}{1-(-1)}=-1$			
			$\frac{-1-0{,}2}{1-(-2)}=-0{,}4$				

$$N(x)=0{,}2\,x^2+1{,}2\,x+1-0{,}4\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-0)=$$

$$=0{,}2\,x^2+1{,}2\,x+1-0{,}4\cdot(x^3+3\,x^2+2\,x)=-0{,}4\,x^3-x^2+0{,}4\,x+1$$

$$N'(x)=(-0{,}4\,x^3-x^2+0{,}4\,x+1)'=-1{,}2\,x^2-2\,x+0{,}4$$

$$\boldsymbol{f'}(-1{,}5)\approx\boldsymbol{N'}(-1{,}5)=-1{,}2\cdot(-1{,}5)^2-2\cdot(-1{,}5)+0{,}4=0{,}7$$

Dostali jsme nepatrně horší výsledek než v předchozích případech. Zkusme tedy přidat další bod.

Příklad: je zadáno pět uzlových bodů **(funkce** $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ **, chyba:** $\Delta \doteq -0{,}332$**)**

Opět máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe pět hodnot.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f}'(-1{,}5)$ když znáte:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1	0	$-0{,}6$

Řešení: Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

Příklad: je zadáno pět uzlových bodů (funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}332$)

Opět máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe pět hodnot.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f}'(-1{,}5)$ když znáte:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1	0	$-0{,}6$

Řešení: Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

-2	-1	0	1	2
$-0{,}6$	0	1	0	$-0{,}6$

$$0{,}6 \qquad 1 \qquad -1 \qquad \frac{-0{,}6-0}{2-1} = -0{,}6$$

$$0{,}2 \qquad -1 \qquad \frac{-0{,}6-(-1)}{2-0} = 0{,}2$$

$$-0{,}4 \qquad \frac{0{,}2-(-1)}{2-(-1)} = 0{,}4$$

$$\frac{0{,}4-(-0{,}4)}{2-(-2)} = 0{,}2$$

Příklad: je zadáno pět uzlových bodů (funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}332$)

Opět máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe pět hodnot.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f}'(-1{,}5)$ když znáte:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1	0	$-0{,}6$

Řešení: Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

-2		-1		0		1		2
$-0{,}6$		0		1		0		$-0{,}6$
	$0{,}6$		1		-1		$\frac{-0{,}6-0}{2-1} = -0{,}6$	
		$0{,}2$		-1		$\frac{-0{,}6-(-1)}{2-0} = 0{,}2$		
			$-0{,}4$		$\frac{0{,}2-(-1)}{2-(-1)} = 0{,}4$			
				$\frac{0{,}4-(-0{,}4)}{2-(-2)} = 0{,}2$				

$$N(x) = -0{,}4\,x^3 - x^2 + 0{,}4\,x + 1 + 0{,}2 \cdot (x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-0) \cdot (x-1) =$$

$$= -0{,}4\,x^3 - x^2 + 0{,}4\,x + 1 + 0{,}2 \cdot (x^2 + 2\,x) \cdot (x^2 - 1) =$$

$$= \mathbf{0{,}2\,x^4 - 1{,}2\,x^2 + 1}$$

Příklad: je zadáno pět uzlových bodů (funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, chyba: $\Delta \doteq -0{,}332$)

Opět máme stejnou *neznámou funkci* f, ale nyní známe pět hodnot.

Odhadněte hodnotu derivace $\boldsymbol{f'}(-1{,}5)$ když znáte:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1	0	$-0{,}6$

Řešení: Zadanými body proložíme interpolační mnohočlen v Newtonově tvaru:

-2		-1		0		1		2
$-0{,}6$		0		1		0		$-0{,}6$
	$0{,}6$		1		-1		$\frac{-0{,}6-0}{2-1} = -0{,}6$	
		$0{,}2$		-1		$\frac{-0{,}6-(-1)}{2-0} = 0{,}2$		
			$-0{,}4$		$\frac{0{,}2-(-1)}{2-(-1)} = 0{,}4$			
				$\frac{0{,}4-(-0{,}4)}{2-(-2)} = 0{,}2$				

$$N(x) = -0{,}4\,x^3 - x^2 + 0{,}4\,x + 1 + 0{,}2\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-0)\cdot(x-1) =$$

$$= -0{,}4\,x^3 - x^2 + 0{,}4\,x + 1 + 0{,}2\cdot(x^2+2\,x)\cdot(x^2-1) =$$

$$= 0{,}2\,x^4 - 1{,}2\,x^2 + 1$$

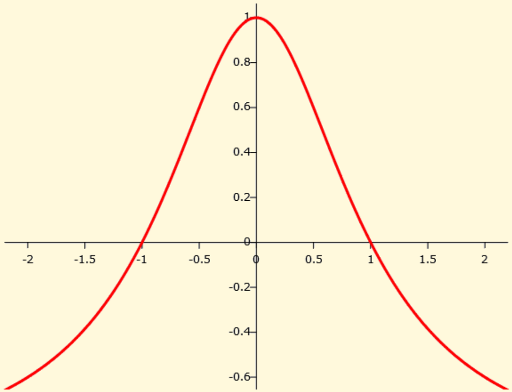
$$N'(x) = (0{,}2\,x^4 - 1{,}2\,x^2 + 1)' = 0{,}8\,x^3 - 2{,}4\,x$$

$$\boldsymbol{f'}(-1{,}5) \approx \boldsymbol{N'}(-1{,}5) = 0{,}8\cdot(-1{,}5)^3 - 2{,}4\cdot(-1{,}5) = 0{,}9$$

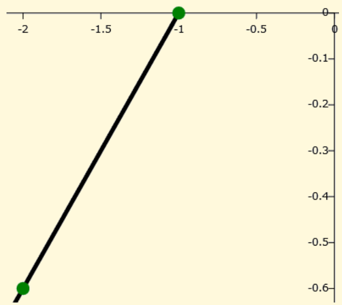
V tomto případě je námi odhadnutá směrnice tečny méně přesná, jak v předchozích případech.

Nemůžeme tedy říci, že vždy při větším počtu zadaných hodnot, dostaneme přesnější výsledek.

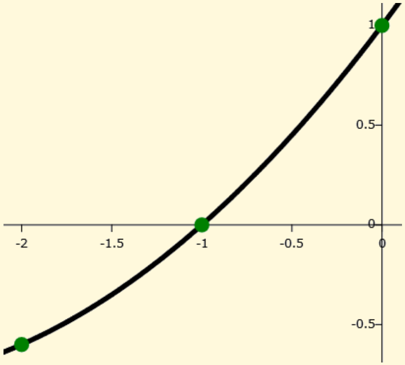
Grafy interpolované funkce a jednotlivých interpolačních mnohočlenů:



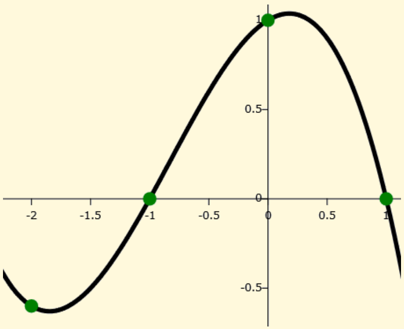
$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$



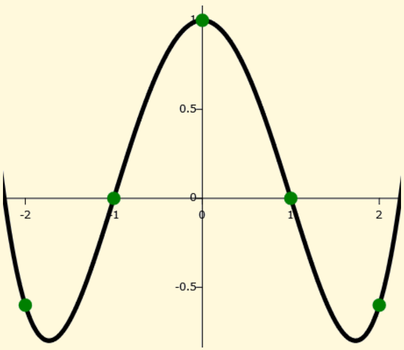
$L_1(x) = 0{,}6\,x + 0{,}6$



$N_2(x) = 0{,}2\,x^2 + 1{,}2\,x + 1$



$N_3(x) = -0{,}4\,x^3 - x^2 + 0{,}4\,x + 1$



$N_4(x) = 0{,}2\,x^4 - 1{,}2\,x^2 + 1$

Vzorce pro odhad hodnoty derivace v uzlovém bodě

Pokud chceme odhadnout hodnotu derivace v uzlovém bodě (nebo uprostřed dvou uzlových bodů), nemusíme sami sestrojovat interpolační mnohočlen, ale můžeme využít následujících vzorců, které již byly odvozeny (například [2, str. 71 a násl.]) na základě interpolačních mnohočlenů.

(1)	$f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$	známe-li hodnoty pro $\boldsymbol{x},\ x+h$
(2)	$f'(x) \approx \dfrac{f(x) - f(x-h)}{h}$	známe-li hodnoty pro $x-h,\ \boldsymbol{x}$
(3)	$f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h}$	známe-li hodnoty pro $x-h,\ x+h$
(4)	$f''(x) \approx \dfrac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2}$	známe-li hodnoty pro $x-h,\ \boldsymbol{x},\ x+h$

Odhadněte $f'(-1)$ je-li dáno:

x	-2	-1	0
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1

Známe-li

-2	-1
$-0{,}6$	0

použijeme pro odhad $f'(\mathbf{-1})$ vzorec (2), kde $\boldsymbol{h} = 1$.

Potom $$f'(-1) \approx \frac{f(-1)-f(-1-1)}{1} = \frac{f(-1)-f(-2)}{1} = \frac{0-(-0{,}6)}{1} = 0{,}6$$

Známe-li

-2	0
$-0{,}6$	1

použijeme pro odhad $f'(\mathbf{-1})$ vzorec (3), kde $\boldsymbol{h} = 1$.

Potom $$f'(-1) \approx \frac{f(-1+1)-f(-1-1)}{2\cdot 1} = \frac{f(0)-f(-2)}{2} = \frac{1-(-0{,}6)}{2} = 0{,}8$$

Známe-li

-1	0
0	1

použijeme pro odhad $f'(\mathbf{-1})$ vzorec (1), kde $\boldsymbol{h} = 1$.

Potom $$f'(-1) \approx \frac{f(-1+1)-f(-1)}{1} = \frac{f(0)-f(-1)}{1} = \frac{1-0}{1} = 1$$

Odhadněte $f''(-1)$ je-li dáno:

x	-2	-1	0
$f(x)$	$-0{,}6$	0	1

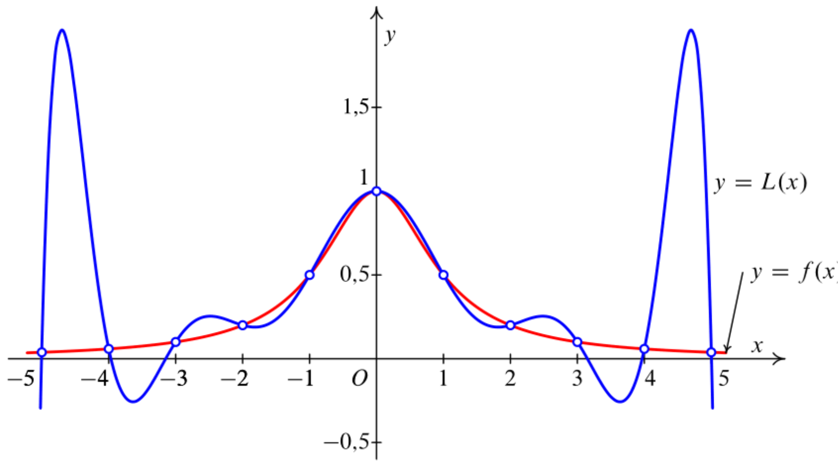
Pro odhad $f''(\mathbf{-1})$ použijeme vzorec (4), kde $\boldsymbol{h} = 1$.

Potom $f''(-1) \approx \frac{f(-1+1)-2f(-1)+f(-1-1)}{1^2} = \dfrac{f(0)-2f(-1)+f(-2)}{1} = 1 - 2\cdot 0 + (-0{,}6) = 0{,}4$

Závěrečná poznámka

Z teorie numerického derivování vyplývá, že jde o velice riskantní operaci. Výsledky mohou být zatíženy velkou chybou, která je většinou tím větší, čím vyšší řád derivace se pokoušíme numericky najít. Je to způsobeno charakteristickou vlastností interpolačních mnohočlenů: ***vlněním*** (obrázek převzat z [5]).
A my hodnoty derivací počítáme (odhadujeme) pomocí interpolačních mnohočlenů.

4.1 Interpolační polynom **65**



Obr. 4.3: Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ a interpolačního polynomu $L(x)$

Z uvedeného důvodu jsme se raději vzorcem pro odhad chyby vůbec nezabývali.

Obejít tuto nepříjemnost při výpočtu (možnost výskytu velké chyby při použití metody založené na interpolaci) je možné předchozím vyhlazením průběhu funkce. Jestliže například dané hodnoty (se kterými pracujeme) nějaké funkce $\boldsymbol{f}(x)$ byly získány experimentálně, a jsou tedy zatíženy určitými nezanedbatelnými chybami, je lépe místo interpolačního mnohočlenu $\boldsymbol{I}(x)$ nejprve aproximovat daná data ***vhodnou funkcí*** (nejenom mnohočlenem) $\boldsymbol{A}(x)$ například metodou nejmenších čtverců a pak teprve nahradit derivace funkce $\boldsymbol{f}(x)$ příslušnými derivacemi funkce $\boldsymbol{A}(x)$.

Použitá literatura

[1] Černá, R., Machalický, M., Vogel, J., Zlatník, Č. *Základy numerické matematiky a programování.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, Celostátní vysokoškolská učebnice pro strojní, elektrotechnické a stavební fakulty vysokých škol technických, Praha 1987, 448 s.

[2] Dalík, J. *Matematika IV, Numerická analýza.* Brno : Fakulta stavební VUT, 2009, 130 s. [Dostupné z adresy:] ⟨[https://intranet.fce.vutbr.cz/pedagog/predmety/opory.asp]⟩

[3] Diblík, J., Baštinec, J. *Matematika IV.* [skriptum] Brno : VUT, Fakulta elektrotechnická, 1991, 120 s. [Dostupné z adresy:] ⟨http://rschwarz.wz.cz/fast/DB_skripta.pdf⟩

[4] Fajmon, B., Růžičková, I. *Matematika 3.* Brno : Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, [on line] ⟨http://www.umat.feec.vutbr.cz/~hlavicka/skripta/matematika3.pdf⟩

[5] Kuben, J., Račková, P. *Numerické metody.* Univerzita obrany, [Dostupné z adresy:] ⟨https://moodle.unob.cz/course/view.php?id=1169⟩

[6] Kučera, R., Morávková, Z. *Numerická matematika.* Vysoká škola báňská — Technická Univerzita Ostrava, ISBN: 978–80–248–3893–9. [on line] ⟨http://mdg.vsb.cz/portal/nm/nm.pdf⟩

[7] Pospíšil, I., Vondrák, V. *Numerické metody I.* Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni, 2011, 191 s. [on line] ⟨http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/numericke_metody.pdf⟩

[8] Přikryl, P. *Numerické metody matematické analýzy.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, Matematika pro vysoké školy technické, sešit XXIV, Praha, 1985, 192 s.

[9] Růžičková, I., Hlavička, R. *Numerické metody.* Brno : Fakulta strojního inženýrství VUT, [on line] ⟨http://physics.ujep.cz/~jskvor/NME/DalsiSkripta/Numerika.pdf⟩

[10] Strečko, O. *Desať kapitol z numerických, grafických a iných metod.* Bratislava : Alfa – Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1978, 1. vydanie, 328 s.