

# NUMERICKÉ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC – II. část (Newtonova metoda, metoda sečen)

## NEWTONOVA METODA (METODA TEČEN)

- Hledáme kořen  $\hat{x} \in \langle a, b \rangle$  rovnice  $f(x) = 0$ .
- Musí být splněny **Fourierovy podmínky**:
  - a) funkce  $f, f', f''$  jsou spojité na  $\langle a, b \rangle$
  - b)  $f(a) \cdot f(b) < 0$
  - c)  $f', f''$  nemění znaménko v  $\langle a, b \rangle$  a  $f'(x) \neq 0 \forall x \in \langle a, b \rangle$

- Počáteční aproximaci  $x_0$  volíme:

$$x_0 = a \Leftrightarrow f(a) \cdot f''(a) > 0$$

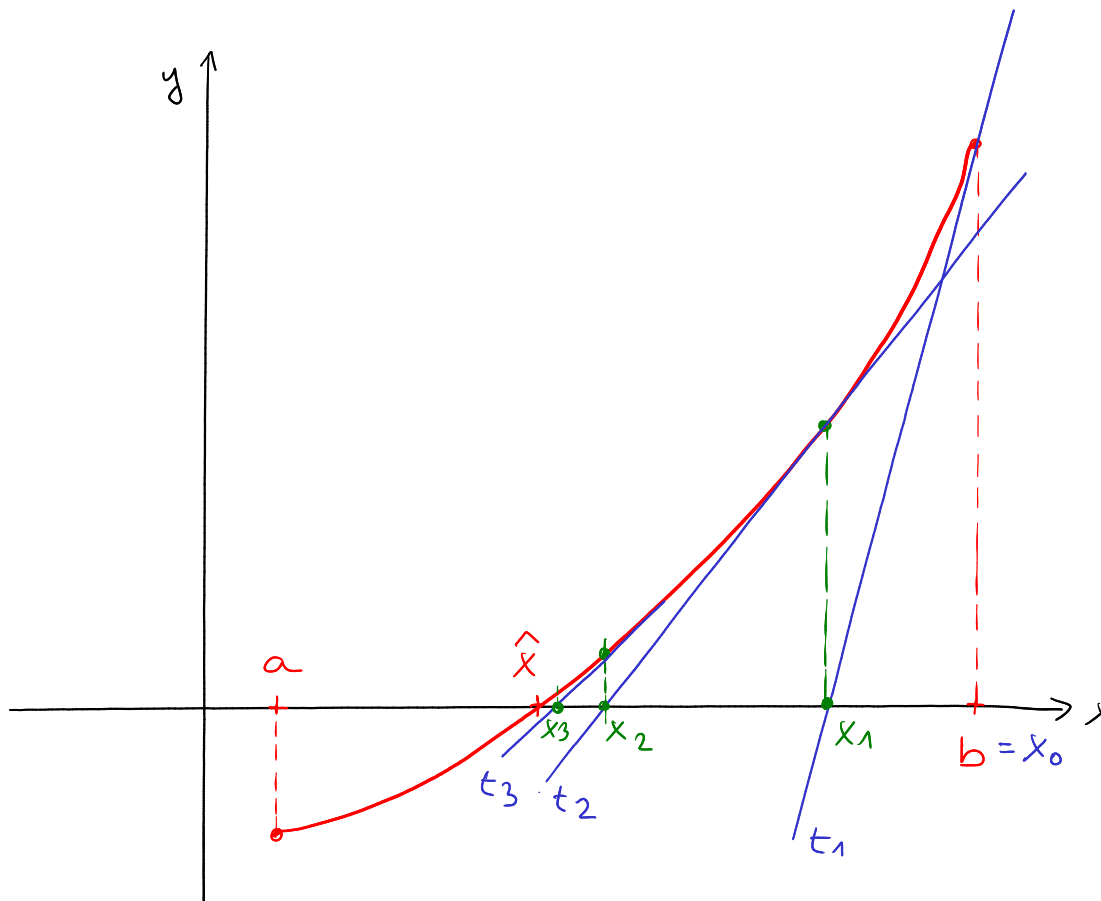
$$x_0 = b \Leftrightarrow f(b) \cdot f''(b) > 0$$

- $x_{i+1}$  je průsečík tečny grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $[x_i, f(x_i)]$  s osou  $x$ , tj.

$$\left. \begin{array}{l} y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i) \\ \text{osa } x: y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

→ v každém kroku potřebujeme  $f(x_i)$  a  $f'(x_i)$

- **Podmínka ukončení:**  $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$



## METODA SEČEN

- Modifikace Newtonovy metody – tečnu nahradíme sečnou
- $x_{i+1}$  je průsečík sečny grafu funkce  $f(x)$  procházející body  $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$  a  $[x_i, f(x_i)]$  s osou  $x$ , tj.

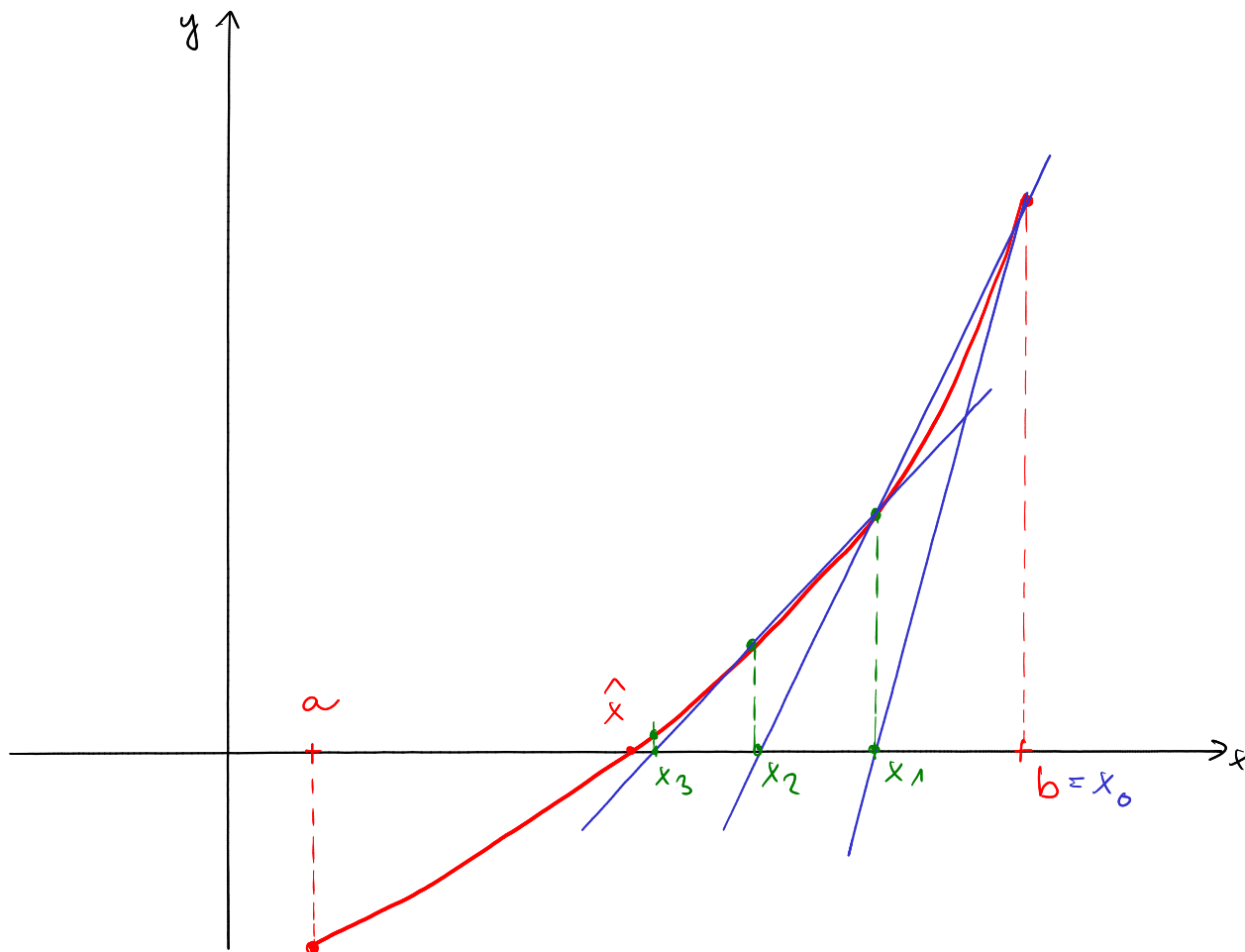
$$* \Rightarrow x_{i+1} = x_i - f(x_i) \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

→ v každém kroku stačí spočítat jen  $f(x_i)$

- Dva startovací body  $x_0, x_1$ :
  - $x_0$  zvolíme (viz Newtonova metoda)
  - $x_1$  spočítáme Newtonovou metodou

$$y - f(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_i) \quad \left. \vphantom{\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_i)} \right\} \Rightarrow *$$

osa  $x$ :  $y=0$



**Příklad:** Aproximujte kladný kořen  $\hat{x} \in \langle 1, 2 \rangle$  rovnice  $x + e^{-x} - 2 = 0$  s chybou menší než  $\varepsilon = 0,01$ . (Zaokrouhlujte na 4 desetinná místa.)

**Newtonova metoda:**

$$f(x) = x + e^{-x} - 2$$

$$f(1) = -0,6321$$

$$f(2) = 0,1353$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x}$$

$$f''(x) = e^{-x}$$

Fourierovy podmínky:

- a)  $D(f) = D(f') = D(f'') = \mathbb{R} \Rightarrow f, f', f''$  jsou spojitě na  $\langle 1, 2 \rangle$  ✓
- b)  $f(1) \cdot f(2) < 0$  ✓
- c)  $e^{-x} \in (0, 1) \forall x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in \langle 1, 2 \rangle$  ✓  
 $f''(x) > 0 \forall x \in \langle 1, 2 \rangle$  ✓

Volba  $x_0$ :

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	2	0,1353	0,8647	/
1	1,8435	0,0018	0,8417	0,1565
2	1,8414			0,0021

$> \varepsilon$  ✗  
 $< \varepsilon$  ✓

$$\underline{\underline{\hat{x} = 1,8414}}$$

**Metoda sečen:**

$i$	$x_i$	$f(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $
0	2	0,1353	/
1	1,8435	0,0018	0,1565
2	1,8414		0,0021

$< \varepsilon$  ✓

$$\underline{\underline{\hat{x} = 1,8414}}$$