# NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

## LU ROZKLAD MATICE

– Čtvercovou regulární matici $A$ řádu 3 rozložíme na součin

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U}, \text{ kde}$$

- $U$ je horní trojúhelníková matice, která vznikne převedením matice $A$ na schodovitý tvar,
- $L$ je dolní trojúhelníková matice tvořena jedničkami na hlavní diagonále a všemi násobky (multiplikátory) použitými při úpravě matice $A$ s opačným znaménkem.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

– Výpočet matice $U$:

*1. krok:* Vhodné násobky 1. řádku přičteme k 2. a 3. řádku tak, abychom v 1. sloupci pod 1. řádkem dostali nuly.

*2. krok:* Vhodný násobek 2. řádku přičteme k 3. řádku tak, abychom v 2. sloupci pod 2. řádkem dostali nulu.

⇒ Při převodu matice $A$ na schodovitý tvar
- smíme pouze přičítat násobek řádku k řádkům pod ním tak, abychom matici $A$ převedli na schodovitý tvar;
- **nesmíme** zaměňovat řádky, vynásobit řádek nějakým číslem, přičítat násobek řádku k řádku nad ním.

## ŘEŠENÍ SLAR POMOCÍ LU ROZKLADU

– Hledáme řešení soustavy $A \cdot X = B$, kde $A$ je regulární matice.
– Využíváme k řešení série soustav se stejnou maticí soustavy a různými vektory pravých stran.

– **Postup:**

$$\underbrace{A}_{L\cdot U} \cdot X = B$$

$$\downarrow$$

$$L \cdot \underbrace{U \cdot X}_{Y} = B \quad \longrightarrow \quad 1. \quad L \cdot Y = B \quad \longrightarrow \quad Y$$

$$2. \quad U \cdot X = Y \quad \longrightarrow \quad X$$

**Příklad:** Určete $LU$ rozklad matice $A$ a ověřte správnost výpočtu.

**a)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & 15 \\ -1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

**Příklad:** Pomocí $LU$ rozkladu řešte soustavu $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{a)}\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b)}\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## LU ROZKLAD MATICE S ČÁSTEČNÝM VÝBĚREM HLAVNÍHO PRVKU

– $A$ je čtvercová regulární matice řádu 3.

– Výpočet matice $U$ je stejný jako u $LU$ rozkladu (bez výběru hlavního prvku), ale navíc:

- Před *1. krokem* vybereme v 1. sloupci prvek s největší absolutní hodnotou. Řádek, který tento prvek obsahuje, přesuneme na první místo.
- Před *2. krokem* vybereme v 2. sloupci pod 1. řádkem prvek s největší absolutní hodnotou. Řádek, který tento prvek obsahuje, přesuneme na druhé místo.

$\to$ $\boldsymbol{P \cdot A = L \cdot U}$, kde

- $P$ je permutační matice, která vznikne z jednotkové matice $E$ prohozením stejných řádků, jako u matice $A$ při převodu na schodovitý tvar,
- $L$ je dolní trojúhelníková matice tvořena jedničkami na hlavní diagonále a všemi násobky (multiplikátory) použitými při úpravě matice $A$ s opačným znaménkem,
- $U$ je horní trojúhelníková matice, která vznikne převedením matice $A$ na schodovitý tvar.

**Příklad:** Určete $LU$ rozklad s částečným výběrem hlavního prvku matice $A$ a ověřte správnost výpočtu.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

# ŘEŠENÍ SLAR POMOCÍ LU ROZKLADU S ČÁSTEČNÝM VÝBĚREM HLAVNÍHO PRVKU

– Hledáme řešení soustavy $A \cdot X = B$, kde $A$ je regulární matice.
– Slouží ke zmenšení zaokrouhlovacích chyb.

– **Postup:**

$$A \cdot X = B$$
$$\downarrow$$
$$\underbrace{P \cdot A}_{L \cdot U} \cdot X = P \cdot B$$
$$\downarrow$$
$$L \cdot \underbrace{U \cdot X}_{Y} = P \cdot B \quad \longrightarrow \quad 1. \quad L \cdot Y = P \cdot B \quad \longrightarrow \quad Y$$
$$2. \quad U \cdot X = Y \quad \longrightarrow \quad X$$

**Příklad:** Pomocí $LU$ rozkladu s částečným výběrem hlavního prvku řešte soustavu $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$