Numerické řešení soustavy lineárních rovnic (SLR)

- je dána soustava n rovnic s n neznámými $x_1, \dots, x_n$:

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
& \vdots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array} \qquad (*)
$$

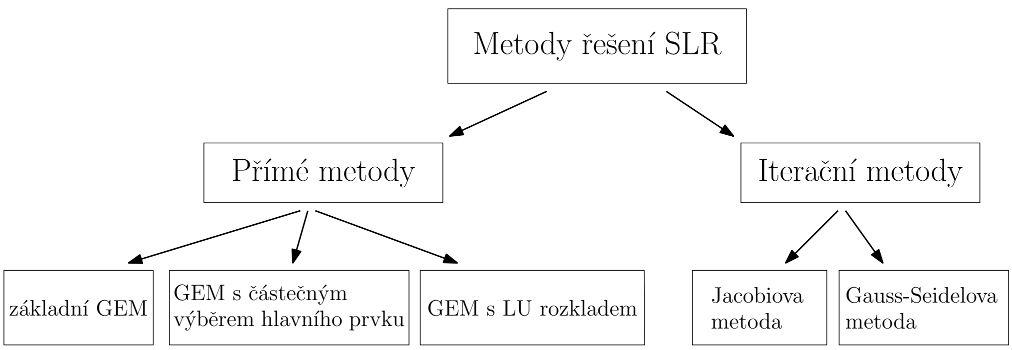
- neboli maticově

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad (**)$$

kde $\boldsymbol{A}$ je matice soustavy, $\boldsymbol{x}$ je vektor neznámých a $\boldsymbol{b}$ je vektor pravé strany:

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.
$$

- každá SLR má buď
  - právě 1 řešení (pokud $\boldsymbol{A}$ je regulární), nebo
  - nekonečně mnoho řešení, nebo
  - žádné řešení.
- Metody řešení:
  (1) přímé (vedou k přesnému řešení),
  (2) iterační (konstruují se iterace, které se nějakým způsobem k řešení blíží).



základní GEM

- pro $\boldsymbol{A}$ regulární
- základní GEM se skládá ze dvou částí:
  1. **přímý chod** - soustava $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se převede na soustavu $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, kde $\boldsymbol{U}$ horní trojúhelníková matice,
  2. **zpětný chod** - řešení soustavy $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$.
- základní GEM = GEM bez výběru hlavního prvku.

- **přímý chod:**
  - cílem je v k-tém kroku vyloučit neznámou x_k z rovnic $i > k$, tj. vynulovat poddiagonální koeficienty v k-tém sloupci matice $\boldsymbol{A}$;
  - k i-té rovnici přičteme m_{ik} násobek k-té rovnice.

$\boxed{\text{algoritmus:}}$

kód

```
for k = 1 to n − 1
    for i = k + 1 to n
        m_ik := − a_ik / a_kk
        b_i := b_i + m_ik b_k
        for j = k to n
            if j = k
            a_ij := 0
            else
            a_ij := a_ij + m_ik a_kj
        end
    end
end
```

pseudokód

```
opakuj pro 1. až (n − 1). sloupec
    opakuj pro poddiagonální prvky
        m_ik := − a_ik / a_kk                nastav multiplikátory
        b_i := b_i + m_ik b_k                uprav pravou stranu
        pro vybraný prvek a_ik nastav
            a_ik := 0
            a pro další na řádku počítej
            a_ij := a_ij + m_ik a_kj         tj. k i-tému řádku přičti
        end                                  m_ik násobek k-tého řádku
    end
end
```

- Pro dané k se prvek a_{kk} nazývá **hlavní prvek**, neboli **pivot**,
- Členy m_{ik} se nazývají **multiplikátory**.

Příklad 1: Ověřte, že SLR má právě jedno řešení. Řešení nalezněte pomocí GEM:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 12 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení. Soustava má právě jedno řešení, pokud je matice soustavy regulární, tj. spočítáme determinant

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 8 - 3 - 4 - 12 + 1 = 12.$$

Tedy $\boldsymbol{A}$ je regulární. Soustavu řešíme pomocí GEM, tj. v přímém chodu postupně upravujeme rozšířenou matici soustavy $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$

pivot

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 12 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{array}\right] \qquad m_{21} = -1 \quad + \qquad m_{31} = -2 \quad +$$

pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & -5 & -3 & -4 \end{array}\right] \qquad m_{32} = 5 \quad +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 36 \end{array}\right] \qquad \text{stop}$$

$$\boldsymbol{U} \qquad \boldsymbol{c}$$

Dále provádíme zpětný chod, tj. řešíme soustavu $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$. Dostane se:

$$\begin{aligned} 12x_3 &= 36 & &\Rightarrow x_3 = 3, \\ x_2 + 3x_3 &= 8 & &\Rightarrow x_2 = 8 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 & &\Rightarrow x_1 = 4 - x_2 - x_3 = 2. \end{aligned}$$

□

Příklad 2: Pomocí GEM řešte následující SLR

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 5\\
x_1 + 7x_3 + 5x_4 &= -1\\
x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 7\\
x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 8
\end{aligned}
$$

Řešení. Přímý chod GEM:

pivot

$$
[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 7 & 5 & -1\\ 0 & 1 & 3 & 6 & 7\\ 1 & -1 & 5 & 1 & 8 \end{array}\right] \quad m_{21} = -1 \quad m_{31} = 0 \quad m_{41} = -1
$$

pivot

$$
\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6\\ 0 & 1 & 3 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \quad m_{32} = -1 \quad m_{42} = 0
$$

pivot

$$
\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 13\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \quad m_{34} = 0
$$

$$
\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & -6\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 13\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]
\quad \underbrace{}_{\boldsymbol{U}} \quad \underbrace{}_{\boldsymbol{c}}
$$

Zpětný chod GEM (řešíme soustavu $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$):

$$
\begin{aligned}
-x_4 &= 3 && \Rightarrow x_4 = -3,\\
x_3 + 3x_4 &= 13 && \Rightarrow x_3 = 13 - 3x_4 = 22,\\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -6 && \Rightarrow x_2 = -6 - 2x_3 - 3x_4 = -41,\\
x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 5 && \Rightarrow x_1 = 5 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -140.
\end{aligned}
$$

□

LU rozklad

- V praxi se používá pro opakované výpočty soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, kde se $\boldsymbol{x}$ může měnit, ale $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ zůstávají stejné.
- Matice $\boldsymbol{A}$ se rozloží na součin
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U},$$
kde $\boldsymbol{L}$ je dolní trojúhelníková matice a $\boldsymbol{U}$ je horní trojúhelníková matice.
- Matice $\boldsymbol{U}$ se dostane jako výsledek přímého chodu GEM,
- matice $\boldsymbol{L}$ se dostane z multiplikátorů ve tvaru

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & -m_{32} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -m_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{algoritmus:}}$ soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ se převede na soustavu $\boldsymbol{LUx} = \boldsymbol{b}$ a postupně se řeší:

1. $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b} \qquad \to y = \ldots$
2. $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y} \qquad \to x = \ldots$

Příklad 3: Určete LU rozklad matice $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Provede se přímý chod GEM, nyní bez pravé strany $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad m_{21} = -3 \quad m_{31} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad m_{32} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{U}, \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Příklad 4: Řešte soustavu (viz. příklad 2) pomocí LU rozkladu:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 5 \\ x_1 + 7x_3 + 5x_4 &= -1 \\ x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 7 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

Řešení. Z příkladu 2 máme

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Snadno se ukáže, že $\boldsymbol{LU} = \boldsymbol{A}$.) Nyní řešme danou soustavu. Nejprve se řeší (trojúhelníková) soustava $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ a dostane se

$$\begin{aligned} y_1 &= 5, \\ y_1 + y_2 &= -1 \qquad \Rightarrow y_2 = -1 - y_1 = -6, \\ y_2 + y_3 &= 7 \qquad \Rightarrow y_3 = 7 - y_2 = 13, \\ y_1 + y_4 &= 8 \qquad \Rightarrow y_4 = 8 - y_1 = 3. \end{aligned}$$

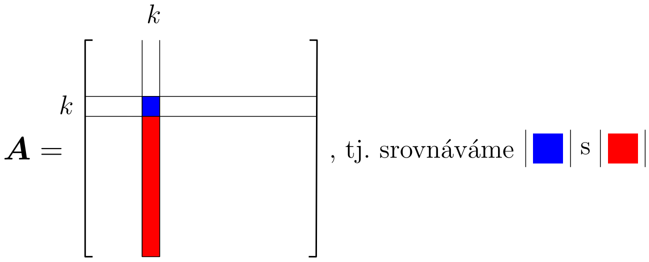
Je vidět, že

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 13 \\ 3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}$$

tak, jak bylo $\boldsymbol{c}$ obdrženo právě v příkladu 2. Nyní se řeší (trojúhelníková) soustava $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$. Tedy dostane se přesně řešení příkladu 2, tj. $\boldsymbol{x} = [-140, -41, 22, -3]^T$. □

GEM s částečným výběrem hlavního prvku

- vhodné zejména, není-li matice $\boldsymbol{A}$ pozitivně definitní (vysvětleno níže),
- řeší problém základního GEM, kdy je pivot $a_{kk} = 0$ (dělí se pak nulou) nebo $a_{kk} \approx 0$ (vede ke znehodnocení řešení vlivem velkých zaokrouhlovacích chyb),
- **částečný výběr hlavního prvku (částečné pivotování)** = v k-tém kroku se jako pivot vybírá prvek s největší absolutní hodnotou v zatím neeliminované části k-tého sloupce (viz obr.)
  $\rightarrow$ pak prohodíme tyto řádky



- matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$ je **ryze diagonálně dominantní**, pokud pro $\forall i = 1, \dots, n$ platí

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

  (tj. diagonální prvky jsou absolutně větší než součet ostatních na řádku),
- symetrická matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,n}$ je **pozitivně definitní**, pokud všechny hlavní minory jsou kladné, tj.

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \det \boldsymbol{A} > 0.$$

Příklad 5: Řešte soustavu z příkladu 1 pomocí GEM s částečným výběrem hlavního prvku.

Řešení. V příkladu 1. byly jako pivoty uvažovány prvky na hlavní diagonále. Při částečném výběru hlavního prvku se berou jako pivoty ty prvky, které mají větší absolutní hodnotu. Tedy

kandidáti na pivota

pivot → prohodíme 1. a 3. řádek

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 12 \\ 2 & -3 & -1 & 4\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 4\end{array}\right] \quad m_{21} = -\tfrac{1}{2} \quad m_{31} = -\tfrac{1}{2} \quad \sim$$

kandidáti na pivota

pivot → neprohazujeme

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 4\\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & 10 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2\end{array}\right] \quad m_{32} = -\tfrac{5}{7} \quad \sim$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 2 & -3 & -1\\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{7}\end{matrix}}_{\boldsymbol{U}} & \underbrace{\begin{matrix} 4 \\ 10 \\ -\frac{36}{7}\end{matrix}}_{\boldsymbol{c}}\end{array}\right] \quad \text{stop}$$

Dále se provede zpětný chod, tj. řeší se soustava $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, a dostane se

$$\begin{aligned} -\frac{12}{7}x_3 &= -\frac{36}{7} && \Rightarrow x_3 = 3, \\ \frac{7}{2}x_2 + \frac{9}{2}x_3 &= 10 && \Rightarrow x_2 = \frac{2}{7}\left(10 - \frac{9}{2}x_3\right) = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 4 && \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(4 + 3x_2 + x_3) = 2. \end{aligned}$$

□

Příklad 6: Pomocí GEM s částečným výběrem hlavního prvku řešte soustavu:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4, \\ -3x_1 - 6x_2 &= -3. \end{aligned}$$

Řešení. Postupně upravujeme rozšířenou matici soustavy $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}]$ a vybíráme pivoty:

kandidáti na pivota

pivot $\to$ prohodíme 1. a 3. řádek

$$[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 6 & -1 & 3 \\ \boxed{2} & 3 & 1 & 4 \\ \boxed{-3} & -6 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & -1 & 3 \end{array}\right] \quad m_{21} = \tfrac{2}{3} \qquad m_{31} = \tfrac{2}{3} \qquad \sim$$

kandidáti na pivota

pivot $\to$ prohodíme 3. a 2. řádek

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad m_{32} = \tfrac{1}{2} \qquad \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right] \quad \text{stop}$$

$$\underbrace{}_{\boldsymbol{U}} \quad \underbrace{}_{\boldsymbol{c}}$$

Zpětných chodem soustavu dořešíme, tedy máme

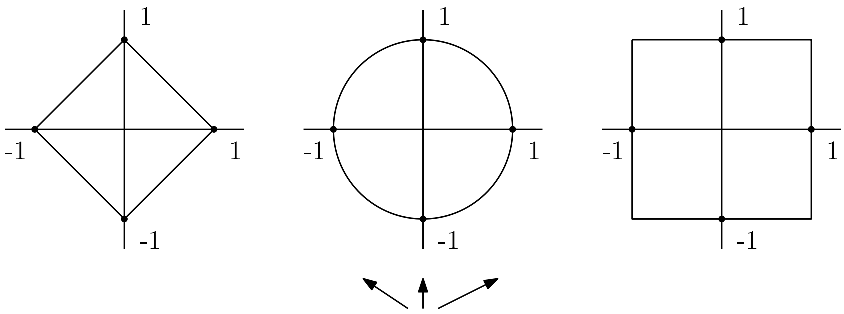
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_3 &= \frac{5}{2} && \Rightarrow x_3 = 5, \\ 2x_2 - x_3 &= 1 && \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}(1 + x_3) = 3, \\ -3x_1 - 6x_2 &= -3 && \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}(-3 + 6x_2) = -5. \end{aligned}$$

□

Normy vektorů

- norma vektoru $\|\boldsymbol{x}\|$ je nezáporné číslo charakterizující jeho velikost - tedy vzdálenost od nulového vektoru,
- Některé vlastnosti: pro libovolný vektor $\boldsymbol{x}$ platí
  1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$,
  2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$,
  3. $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$,
  4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$
- významné normy vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$



jednotkové koule v $\mathbb{R}^2$, tj. množina všech $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, které mají $\|\boldsymbol{x}\| = 1$

Iterační metody

- Jacobiova metoda a Gauss-Seidelova metoda,
- pro soustavu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ zvolíme počáteční vektor $\boldsymbol{x}_0$ a generujeme posloupnost $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$,

  $\boxed{\text{stop kritéria:}}$ obdobně jako u iteračních metod řešení jedné nelineární rovnice, tedy např.

  - nejčastěji $\|\boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_i\| \leq \varepsilon$,
  - $\|\boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_i\| \leq \varepsilon \|\boldsymbol{x}_i\|$ a další ...
- metody jsou založeny na rozkladu matice $\boldsymbol{A}$ na $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U}$, kde $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}$ jsou ryze dolní a ryze horní trojúhelníkové matice a matice $\boldsymbol{D}$ je diagonální, tj.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{L}} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

Jacobiova metoda

$\boxed{\text{podmínky konvergence:}}$ matice $\boldsymbol{A}$ musí být ryze diagonálně dominantní,

$\boxed{\text{startovací vektor:}}$ libovolný, obvykle nulový vektor,

$\boxed{\text{algoritmus:}}$

$$\boldsymbol{x}_{i+1} := \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{D}^{-1}\left(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U}\right)\boldsymbol{x}_i,$$

neboli po prvcích ($\boldsymbol{x}_i = (x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i})^T$)

$$x_{j,i+1} := \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{k=1,k\neq j}^{n} a_{j,k}x_{k,i}\right) \qquad \text{pro } j = 1, \ldots, n.$$

Gauss-Seidelova metoda

$\boxed{\text{podmínky konvergence:}}$ matice $\boldsymbol{A}$ musí být ryze diagonálně dominantní nebo pozitivně definitní,

$\boxed{\text{startovací vektor:}}$ libovolný, obvykle nulový vektor,

$\boxed{\text{algoritmus:}}$

$$\boldsymbol{x}_{i+1} := (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_i,$$

neboli po prvcích

$$x_{j,i+1} := \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}x_{k,i+1} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{j,k}x_{k,i}\right) \qquad \text{pro } j = 1, \ldots, n.$$

Jacobiova a Gauss-Seidelova metoda pro matici typu 3×3

- je dána soustava
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$
Z i-té rovnice vyjádříme neznámou x_i, tedy
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow \ x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right), \\ \Rightarrow \ x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right), \\ \Rightarrow \ x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right). \end{array}$$

- **Jacobiova metoda:** používají se jen předchozí iterace $\boldsymbol{x}_i = (x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i})^T$
$$\begin{aligned} x_{1,i+1} &= \tfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\, x_{2,i} - a_{13}\, x_{3,i}\right) \\ x_{2,i+1} &= \tfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\, x_{1,i} - a_{23}\, x_{3,i}\right) \\ x_{3,i+1} &= \tfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}\, x_{1,i} - a_{32}\, x_{2,i}\right) \end{aligned}$$

- **Gauss-Seidelova metoda:** používá se předchozí iterace $\boldsymbol{x}_i$ i již spočítané prvky nové iterace $\boldsymbol{x}_{i+1}$
$$\begin{aligned} x_{1,i+1} &= \tfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\, x_{2,i} - a_{13}\, x_{3,i}\right) \\ x_{2,i+1} &= \tfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\, x_{1,i+1} - a_{23}\, x_{3,i}\right) \\ x_{3,i+1} &= \tfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}\, x_{1,i+1} - a_{32}\, x_{2,i+1}\right) \end{aligned}$$

Příklad 7: Řešte SLR pomocí Jacobiovy a Gauss-Seidelovy metody s přesností $\varepsilon = 0.01$. Pro stop kritérium použijte $||\cdot||_\infty$ normu. Nejprve vždy ověřte podmínky konvergence.

$$\begin{aligned} 5.2x_1 + 2.7x_2 &= 1.3 \\ 1.1x_1 + 8.9x_2 &= 2.4 \end{aligned}$$

Řešení. **(a) Jacobiova metoda.** Ověříme podmínky konvergence. Zřejmě je matice soustavy ryze diagonálně dominantní, protože

$$|5.2| > |2.7| \quad \text{a} \quad |8.9| > |1.1|.$$

Metoda pak konverguje pro libovolný počáteční vektor. Stačí např. jednoduše zvolit $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^T$.

Z i-té rovnice vyjádříme proměnnou x_i, a odtud dostaneme předpis pro další iterace

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{5.2}(1.3 - 2.7x_2), \\ x_2 &= \tfrac{1}{8.9}(2.4 - 1.1x_1). \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{počítáme iterace} \quad \begin{aligned} x_{1,i+1} &= \tfrac{1}{5.2}(1.3 - 2.7x_{2,i}), \\ x_{2,i+1} &= \tfrac{1}{8.9}(2.4 - 1.1x_{1,i}). \end{aligned}$$

Dále doplníme do tabulky iterace $\boldsymbol{x}_i = (x_{1,i}, x_{2,i})^T$:

i	$x_{1,i}$	$x_{2,i}$	$\lVert\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\rVert_\infty$
0	0	0	\
1	0.25	0.2697	$\lVert[0.25, 0.2697]^T\rVert_\infty = 0.2697$
2	0.1100	0.2388	$\lVert[-0.14, -0.309]^T\rVert_\infty = 0.14$
3	0.1260	0.2561	$\lVert[0.016, 0.0173]^T\rVert_\infty = 0.0173$
4	0.1170	0.2541	$\lVert[-0.009, -0.002]^T\rVert_\infty = 0.009 < \varepsilon$

Tedy po splnění stop kritéria je přibližné řešení

$$\hat{\boldsymbol{x}} \approx \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.1170 \\ 0.2541 \end{bmatrix}.$$

(b) Gauss-Seidelova metoda. Ukázali jsme už, že matice soustavy je ryze diagonálně dominantní. Tudíž GS metoda konverguje pro libovolný startovací vektor. Opět zvolíme např. jednoduše $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^T$. Z i-té rovnice vyjádříme proměnnou x_i, a GS metoda se dostane ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{5.2}(1.3 - 2.7x_2), \\ x_2 &= \tfrac{1}{8.9}(2.4 - 1.1x_1). \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{počítáme iterace} \quad \begin{aligned} x_{1,i+1} &= \tfrac{1}{5.2}(1.3 - 2.7x_{2,i}), \\ x_{2,i+1} &= \tfrac{1}{8.9}(2.4 - 1.1x_{1,i+1}). \end{aligned}$$

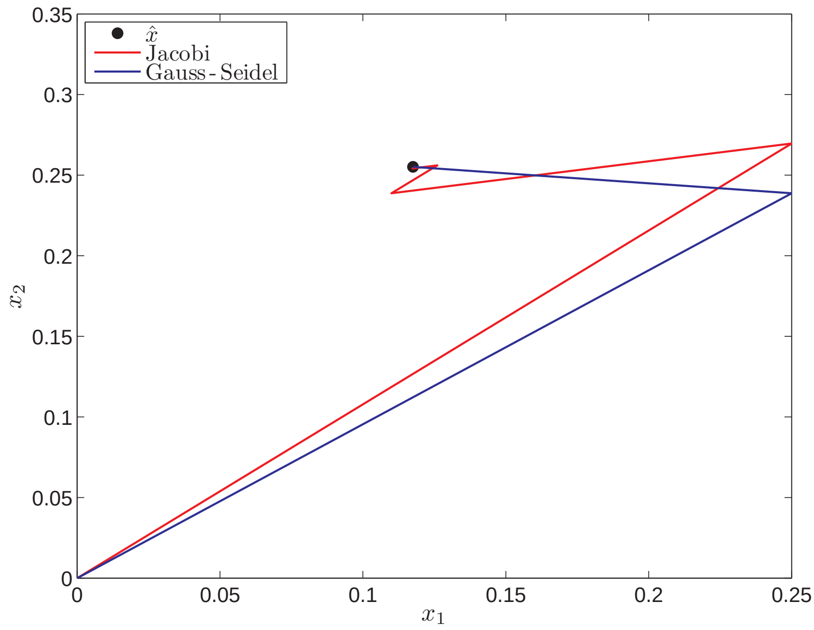
Výpočty zapíšeme do tabulky:

i	$x_{1,i}$	$x_{2,i}$	$\lVert\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\rVert_\infty$
0	0	0	\
1	0.25	0.2388	$\lVert[0.25, 0.2388]^T\rVert_\infty = 0.25$
2	0.1260	0.2541	$\lVert[-0.124, 0.0153]^T\rVert_\infty = 0.124$
3	0.1181	0.2551	$\lVert[-0.0079, 0.001]^T\rVert_\infty = 0.001 < \varepsilon$

Tedy G-S metodou máme

$$\hat{\boldsymbol{x}} \approx \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.1181 \\ 0.2551 \end{bmatrix}$$

(c) Poznámka. Je vidět že Gauss-Seidelova metoda konverguje rychleji (byly potřeba 3 iterace namísto 4 u Jacobiovy metody). Obě metody je možné porovnat graficky:



Po 1000 iteracích Gauss-Seidelovy metody se dostane aproximace řešení

$$\boldsymbol{x}_{1000} = \begin{bmatrix} 0.117524821057493 \\ 0.255137381667051 \end{bmatrix}.$$

Srovnejte s dosaženými výsledky. □

Příklad 8: Řešte SLR pomocí Jacobiovy a Gauss-Seidelovy metody s přesností $\varepsilon = 0.1$. Pro stop kritérium použijte $||\cdot||_1$ normu. Nejprve vždy ověřte podmínky konvergence.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2.1x_2 - 1.5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 6.4x_2 - 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Řešení. **(a) Jacobiova metoda.** Ověříme podmínky konvergence. Zřejmě je matice soustavy ryze diagonálně dominantní, protože

$$|5| > |2.1| + |-1.5| \quad \text{a} \quad |6.4| > |2| + |-2| \quad \text{a} \quad |3| > |-1| + |-1.5|.$$

Metoda pak konverguje pro libovolný počáteční vektor. Stačí např. jednoduše zvolit $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^T$.
Z i-té rovnice vyjádříme proměnnou x_i a máme předpis pro iterace

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{5}(4 - 2.1x_2 + 1.5x_3) \\ x_2 &= \tfrac{1}{6.4}(4 - 2x_1 + 2x_3) \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}(-2 + x_1 - 1.5x_2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{počítáme iterace} \quad \begin{aligned} x_{1,i+1} &= \tfrac{1}{5}(4 - 2.1x_{2,i} + 1.5x_{3,i}), \\ x_{2,i+1} &= \tfrac{1}{6.4}(4 - 2x_{1,i} + 2x_{3,i}), \\ x_{3,i+1} &= \tfrac{1}{3}(-2 + x_{1,i} - 1.5x_{2,i}). \end{aligned}$$

Počítané iterace doplníme do tabulky, včetně stop kritéria:

i	$x_{1,i}$	$x_{2,i}$	$x_{3,i}$	$\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\|_1$
0	0	0	0	\
1	0.8	0.625	-0.6667	$\|[0.8, 0.625, -0.6667]^T\|_1 = 2.0917$
2	0.3375	0.1667	-0.7125	$\|[-0.4625, -0.4683, -0.0458]^T\|_1 = 0.9766$
3	0.5162	0.2969	-0.6375	$\|[0.1787, 0.1302, 0.075]^T\|_1 = 0.3839$
4	0.4841	0.2645	-0.6431	$\|[-0.0321, -0.0324, -0.0056]^T\|_1 = 0.0701 < \varepsilon$

Tedy přibližné řešení je

$$\hat{\boldsymbol{x}} \approx \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.4841 \\ 0.2645 \\ -0.6431 \end{bmatrix}$$

(b) Gauss-Seidelova metoda. Matice soustavy je ryze diagonálně dominantní, tedy podmínky konvergence jsou splněny. Metoda konverguje pro libovolný startovací bod, zvolíme např. opět $\boldsymbol{x}_0 = [0, 0, 0]^T$. Iterační předpis je ve tvaru:

$$\begin{aligned} x_{1,i+1} &= \tfrac{1}{5}(4 - 2.1x_{2,i} + 1.5x_{3,i}), \\ x_{2,i+1} &= \tfrac{1}{6.4}(4 - 2x_{1,i+1} + 2x_{3,i}), \\ x_{3,i+1} &= \tfrac{1}{3}(-2 + x_{1,i+1} - 1.5x_{2,i+1}). \end{aligned}$$

Počítané iterace doplníme do tabulky:

i	$x_{1,i}$	$x_{2,i}$	$x_{3,i}$	$\Vert\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\Vert_1$
0	0	0	0	$\setminus$
1	0.8	0.375	-0.5875	$\Vert[0.8, 0.375, -0.5875]^T\Vert_1 = 1.7625$
2	0.4663	0.2957	-0.6591	$\Vert[-0.3337, -0.0793, -0.0716]^T\Vert_1 = 0.4846$
3	0.4781	0.2696	-0.6421	$\Vert[0.0118, -0.0261, 0.017]^T\Vert_1 = 0.0549 < \varepsilon$

Tedy G-S metodou máme

$$\hat{\boldsymbol{x}} \approx \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 0.4781 \\ 0.2696 \\ -0.6421 \end{bmatrix}$$

Po 1000 iteracích Gauss-Seidelovy metody by se dostala aproximace řešení

$$\boldsymbol{x}_{1000} = \begin{bmatrix} 0.494915254237288 \\ 0.271186440677966 \\ -0.637288135593220 \end{bmatrix}.$$

Srovnejte s dosaženými výsledky. □