# LU-rozklad s částečným výběrem hlavního prvku
Rozklad matice $A$ na matice $L$ a $U$

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

Milan Jakoš

# Teorie

## Proč?

Výběr hlavního prvku provádíme, abychom předešli případným zaokrouhlovacím chybám, kdybychom měli pro výsledky zadaný určitý počet desetinných míst (např. 3).

## Co je hlavní prvek?

Jako hlavní prvek zvolíme vždy prvek s nejvyšší absolutní hodnotou ve sloupci. Při částečném výběru hlavního prvku budeme volit z prvního sloupce. Řádek matice obsahující hlavní prvek umístíme jako první řádek v matici. Například pokud byl hl. prvek ve druhém řádku matice, prohodíme 1. a 2. řádek matice. Stejná prohození řádků provedeme i v permutační matici.

## Co je permutační matice?

Permutační matice vznikne z jednotkové matice proházením pořadí jejích řádků.

## Postup řešení

1. Původní matici $A$ označíme $A^{(0)}$ a k ní přiřadíme permutační matici v původním stavu označenou $P^{(0)}$ (v tomto stavu je shodná s jednotkovou maticí).

2. Určíme hlavní prvek (prvek s nejvyšší absolutní hodnotou v prvním sloupci) a provedeme prohození řádků, čímž získáme matici $A^{(1)}$ , stejné prohození provedeme u permutační matice, kterou označíme $P^{(1)}$.

3. Upravíme matici $A^{(1)}$ na matici $A^{(2)}$ a získáme konstanty $m_{21}$ a $m_{31}$. Matice $P^{(1)}$ se nemění, můžeme ji však pro přehlednost přejmenovat na $P^{(2)}$.

4. Porovnáme absolutní hodnoty prvků $a_{22}$ a $a_{32}$ a případně prohodíme řádky tak, aby na druhém řádku byla konstanta s vyšší absolutní hodnotou. Získáme matice $A^{(3)}$ a $P^{(3)}$.

5. Upravíme matici $A^{(3)}$ a získáme konstantu $m_{21}$ a matici $A^{(4)}$, což je matice $U$. Současně jsme získali matici $P$.

6. Sestavíme matici $L$.

7. Můžeme provést zkoušku $LU = PA$.

# Řešené příklady

## Příklad 1.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Ověříme, že je matice $A$ regulární:
Ověření provedeme tak, že spočítáme její determinant, který nesmí být roven nule.

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 120$$

Nyní začneme upravovat
1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \phantom{0} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \phantom{0} \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$m_{21} = -1 \qquad m_{31} = -\tfrac{1}{2}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad 5 = 5 \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -1$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

V následujících příkladech budeme používat regulární matice a proto tuto skutečnost nebudeme ověřovat.

## Příklad 2.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \phantom{0} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{2} \qquad m_{31} = -\tfrac{1}{2}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 3 > 1 \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{0} \\ \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{1}{3}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 3.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \phantom{0} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{2} \qquad m_{31} = -\tfrac{1}{4}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \quad 3 > \tfrac{3}{2} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{0} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{1}{2}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

# Příklad 4.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 20 & 1 & 15 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 20 & 1 & 15 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 15 \\ 10 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 20 & 1 & 15 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \phantom{0} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{2} \qquad m_{31} = -\tfrac{1}{4}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 15 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{25}{4} \end{pmatrix} \quad \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{4} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 15 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{25}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{0} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{1}{2}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 15 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 1 & 15 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 15 \\ 10 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 20 & 1 & 15 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 15 \\ 10 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 5.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \phantom{x} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{2} \qquad m_{31} = -\tfrac{1}{2}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad \tfrac{5}{2} > \tfrac{3}{2} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ \cdot(-\frac{3}{5}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{3}{5}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{13}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 6.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{2}{10}) \\ \phantom{x} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{2} \qquad m_{31} = -\tfrac{2}{10}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad 2 > \tfrac{2}{5} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ \cdot\frac{1}{5} \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{1}{5}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{2}{10} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{2}{10} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 7.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.
$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{6}) \\ \phantom{0} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{2} \qquad m_{31} = -\tfrac{1}{6}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \tfrac{3}{2} > \tfrac{5}{6} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.
$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{0} \\ \cdot(-\frac{5}{9}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{5}{9}$$

5.
$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

6.
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

7.
$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{9} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 8.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{x} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \cdot(-\frac{1}{8}) \\ \phantom{x} \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{4} \qquad m_{31} = -\tfrac{1}{8}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix} \quad 5 > \tfrac{1}{2} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \cdot\frac{1}{10} \\ \leftarrow + \end{array} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{1}{10}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 9.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{5}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{27}{5} & \frac{18}{5} \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{4}{5}) \\ \phantom{x} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{5} \qquad m_{31} = -\tfrac{4}{5}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{27}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad \tfrac{27}{5} > \tfrac{7}{5} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{27}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & -\frac{7}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ \cdot\frac{7}{27} \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{7}{27}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{27}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{7}{27} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{7}{27} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{27}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

# Příklad 10.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \leftarrow + \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{2}{9}) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{3} \qquad m_{31} = -\tfrac{2}{9}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{34}{9} & \frac{35}{9} \end{pmatrix} \quad \tfrac{23}{3} > \tfrac{34}{9} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{34}{9} & \frac{35}{9} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{34}{69}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{34}{69}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{223}{69} \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{34}{69} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{34}{69} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 0 & \frac{23}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{223}{69} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 11.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & \frac{5}{3} & \frac{19}{3} \end{pmatrix}$$

1.
$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & \frac{5}{3} & \frac{19}{3} \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 2 & \frac{5}{3} & \frac{19}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & \frac{5}{3} & \frac{19}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{2}{3}) \\ \phantom{x} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\frac{1}{3} \qquad m_{31} = -\frac{2}{3}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad 1 = 1 \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.
$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -1$$

5.
$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

6.
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.
$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 2 & \frac{5}{3} & \frac{19}{3} \end{pmatrix}$$
$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & \frac{5}{3} & \frac{19}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 2 & \frac{5}{3} & \frac{19}{3} \end{pmatrix}$$
$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 12.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{1} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \phantom{1} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{2} \qquad m_{31} = -\tfrac{1}{4}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \quad 3 > \tfrac{3}{2} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{1} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{1}{2}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 13.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{4} \\ \phantom{x} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{2} \qquad m_{31} = \tfrac{1}{4}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad 2 < 6 \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože je 2 méně než 6, dojde k prohození druhého a třetího řádku, tento krok zapříčiní prohození konstant $m_{21}$ a $m_{31}$ v matilci $L$.

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{1}{3}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

# Příklad 14.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{5}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{5} \qquad m_{31} = 0$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \tfrac{6}{5} < 6 \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože je $\frac{6}{5}$ méně než 6, dojde k prohození druhého a třetího řádku, tento krok zapříčiní prohození konstant $m_{21}$ a $m_{31}$ v matilci $L$.

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{0} \\ \cdot(-\frac{1}{5}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{1}{5}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{12}{5} \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 15.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{0} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$m_{21} = -\frac{1}{2} \qquad m_{31} = 0$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad 0 < 2 \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože je 0 méně než 2, dojde k prohození druhého a třetího řádku, tento krok zapříčiní prohození konstant $m_{21}$ a $m_{31}$ v matilci $L$.

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = U \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

$$m_{32} = 0$$

5.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 16.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{2}{3}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{3} \\ \phantom{x} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\frac{2}{3} \qquad m_{31} = \frac{1}{3}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \frac{10}{3} < \frac{14}{3} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože je $\frac{10}{3}$ méně než $\frac{14}{3}$, dojde k prohození druhého a třetího řádku, tento krok zapříčiní prohození konstant $m_{21}$ a $m_{31}$ v matilci $L$.

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ \cdot\frac{10}{14} \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{10}{14}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{7} \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{10}{14} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{10}{14} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 17.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{2}{3}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{11}{3} \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \phantom{x} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{2}{3} \qquad m_{31} = -\tfrac{1}{3}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \quad \tfrac{8}{3} < \tfrac{13}{3} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože je $\frac{8}{3}$ méně než $\frac{13}{3}$, dojde k prohození druhého a třetího řádku, tento krok zapříčiní prohození konstant $m_{21}$ a $m_{31}$ v matilci $L$.

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ \cdot(-\frac{8}{13}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{8}{13}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{29}{13} \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{13} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{13} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{29}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

## Příklad 18.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \phantom{x} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\frac{1}{4} \qquad m_{31} = -\frac{1}{2}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Protože je $\frac{1}{4}$ méně než $\frac{1}{2}$, dojde k prohození druhého a třetího řádku, tento krok zapříčiní prohození konstant $m_{21}$ a $m_{31}$ v matilci $L$.

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{1}{2}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

# Příklad 19.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 10 & 10 & 4 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 10 & 10 & 4 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 4 \\ 4 & 5 & 12 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{2}{5}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{52}{5} \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{2}{5}) \\ \phantom{x} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{2}{5} \qquad m_{31} = -\tfrac{2}{5}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{52}{5} \\ 0 & -2 & \frac{32}{5} \end{pmatrix} \quad 1 < 2 \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože je 1 méně než 2, dojde k prohození druhého a třetího řádku, tento krok zapříčiní prohození konstant $m_{21}$ a $m_{31}$ v matilci $L$.

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 4 \\ 0 & -2 & \frac{32}{5} \\ 0 & 1 & \frac{52}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ \cdot\frac{1}{2} \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{1}{2}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 4 \\ 0 & -2 & \frac{32}{5} \\ 0 & 0 & \frac{68}{5} \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 10 & 4 \\ 0 & -2 & \frac{32}{5} \\ 0 & 0 & \frac{68}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 10 & 10 & 4 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

# Příklad 20.

Mějme matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

1.

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \qquad P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \phantom{x} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \phantom{x} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$m_{21} = -\tfrac{1}{2} \qquad m_{31} = -\tfrac{1}{3}$$

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & \frac{20}{3} \end{pmatrix} \quad \tfrac{1}{2} < 2 \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Protože je $\frac{1}{2}$ méně než 2, dojde k prohození druhého a třetího řádku, tento krok zapříčiní prohození konstant $m_{21}$ a $m_{31}$ v matilci $L$.

4.

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{20}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{x} \\ \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \qquad P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = -\frac{1}{4}$$

5.

$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = U \qquad P^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

6.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = P \cdot A$$

# Použité materiály

Mgr. HINTERLEITNER Irena , Ph.D.; RNDr. PŘIBYL Oto: MATEMATIKA I, Vybrané kapitoly z numerických výpočtů

Doc. RNDr. ČERMÁK Libor, CSc.; RNDr. HLAVIČKA Rudolf, CSc. : Numerické metody

JAKOŠ Milan: LU-rozklad řešené příklady

Za spolupráce a pod vedením Mgr. Ireny Hinterleitner, Ph.D., které tímto děkuji.

V Brně 2017