LU-rozklad
řešené příklady

Milan Jakoš

Teoretický úvod

Abychom na matici A mohli provést LU-rozklad je nutné, aby matice A byla čtvercová a regulární. LU-rozklad je způsob jakým můžeme matici A zapsat jako součin dvou matic L a U. Matice L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na hlavní diagonále a matice U je horní trojúhelníková matice.

LU-rozklad se používá k řešení systému lineárních rovnic $Ax = b$ stejně jako Gausova eliminační metoda, ovšem LU-rozklad je mnohem efektivnější v situaci, že máme sérii výpočtů, ve kterých máme více vektorů pravých stran $b^{(i)}, kde\ i = 1, 2, ...$ Pro každé konkrétní $b^{(i)}$ dopočítáme řešení $x^{(i)}$.

Pokud k řešení soustavy $Ax = b$ využijeme rozkladu matice A na součin matic L a U, můžeme celý postup výpočtu zapsat jako $Ax = (LU)x = L(Ux) = Ly = b$.

Řešené příklady

Příklad 1.

Mějme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme zapsat ve taru $Ax = b$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ověříme, že je matice A regulární:
Ověření provedeme tak, že spočítáme její determinant, který nesmý být roven nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

Nyní můžeme začít upravovat matici A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$m_{21} = -2 \qquad m_{31} = 1 \qquad m_{32} = 0$$

Nyní sestavíme matici L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici U jsme získali úpravou matice A:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pro ověření můžeme provést kontrolu $A = L \cdot U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Nyní využijeme vztahu $Ly = b$ a vypočítáme y:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- předchozí rovnost můžeme přímo zapsat jako rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 0 \\ -y_1 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 1 \end{array}$$

Poté již ze vztahu $Ux = y$ vypočítáme x:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3} \\ 3x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \\ -x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = -1 \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic jsme získali řešení $x = [5/3, 1/3, -1]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Příklad 2.

Mějme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \\
2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\
-2x_1 + x_2 &= 1
\end{aligned}
$$

Tuto soustavu můžeme zapsat ve taru $Ax = b$ tedy:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Ověříme, že je matice A regulární:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7
$$

Nyní můžeme začít upravovat matici A:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \end{matrix}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \leftarrow + \end{matrix}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \cdot 1 \\ \leftarrow + \end{matrix}
\sim
$$

$$
m_{21} = -2 \qquad m_{31} = 2 \qquad m_{32} = 1
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Nyní sestavíme matici L:

$$
L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

Matici U jsme získali úpravou matice A:

$$
U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Pro ověření můžeme provést kontrolu $A = L \cdot U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyní využijeme vztahu $Ly = b$ a vypočítáme y:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1 = 3 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = -4 \\ -2y_1 - y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = 3 \end{array}$$

Poté již ze vztahu $Ux = y$ vypočítáme x:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{7} \\ -7x_2 + 3x_3 = -4 \Rightarrow x_2 = \frac{13}{7} \\ x_3 = 3 \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic jsme získali řešení $x = [3/7, 13/7, 3]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Příklad 3.

Mějme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 1\\
2x_1 - x_2 + x_3 &= 0\\
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Tuto soustavu můžeme zapsat ve taru $Ax = b$ tedy:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 3 \end{pmatrix}
$$

Ověříme, že je matice A regulární:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8
$$

Nyní můžeme začít upravovat matici A:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \cdot(-2)\\ \leftarrow + \\ \end{matrix}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2\\ 0 & -7 & 5\\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \cdot(-1)\\ \\ \leftarrow + \end{matrix}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2\\ 0 & -7 & 5\\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{4}{7}) \\ \leftarrow + \end{matrix}
\sim
$$

$$
m_{21} = -2 \qquad\qquad m_{31} = -1 \qquad\qquad m_{32} = -\tfrac{4}{7}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2\\ 0 & -7 & 5\\ 0 & 0 & \frac{8}{7} \end{pmatrix}
$$

Nyní sestavíme matici L:

$$
L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & \frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix}
$$

Matici U jsme získali úpravou matice A:

$$
U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2\\ 0 & -7 & 5\\ 0 & 0 & \frac{8}{7} \end{pmatrix}
$$

Pro ověření můžeme provést kontrolu $A = L \cdot U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{8}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní využijeme vztahu $Ly = b$ a vypočítáme y:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{4}{7} & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -2 \\ y_1 + \frac{4}{7}y_2 + y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = \frac{22}{7} \end{array}$$

Poté již ze vztahu $Ux = y$ vypočítáme x:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{22}{7} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4} \\ -7x_2 + 5x_3 = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{4} \\ \frac{8}{7}x_3 = \frac{22}{7} \Rightarrow x_3 = \frac{11}{4} \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic jsme získali řešení $x = [-1/4, 9/4, 11/4]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Příklad 4.

Mějme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -2x_1 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme zapsat ve taru $Ax = b$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ověříme, že je matice A regulární:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20$$

Nyní můžeme začít upravovat matici A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-5) \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -17 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -17 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{1}{3} \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$m_{21} = -5 \qquad m_{31} = 2 \qquad m_{32} = \tfrac{1}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Nyní sestavíme matici L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Matici U jsme získali úpravou matice A:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Pro ověření můžeme provést kontrolu $A = L \cdot U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní využijeme vztahu $Ly = b$ a vypočítáme y:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{3} & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1 = 1 \\ 5y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = -4 \\ -2y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow y_3 = \frac{5}{3} \end{array}$$

Poté již ze vztahu $Ux = y$ vypočítáme x:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & -17 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4} \\ 6x_2 - 17x_3 = -4 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4} \\ \frac{10}{3}x_3 = \frac{5}{3} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic jsme získali řešení $x = [-1/4, 3/4, 1/2]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Příklad 5.

Mějme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme zapsat ve taru $Ax = b$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ověříme, že je matice A regulární:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Nyní můžeme začít upravovat matici A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{3}{2}) \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$m_{21} = -\frac{3}{2} \qquad m_{31} = -\frac{1}{2} \qquad m_{32} = -1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní sestavíme matici L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici U jsme získali úpravou matice A:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro ověření můžeme provést kontrolu $A = L \cdot U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní využijeme vztahu $Ly = b$ a vypočítáme y:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 4 \\ \tfrac{3}{2}y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 &= -6 \\ \tfrac{1}{2}y_1 + y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow y_3 &= 5 \end{aligned}$$

Poté již ze vztahu $Ux = y$ vypočítáme x:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \Rightarrow x_1 &= 23 \\ \tfrac{1}{2}x_2 + 2x_3 = -6 \Rightarrow x_2 &= -32 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Pro zadanou soustavu rovnic jsme získali řešení $x = [23, -32, 5]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Příklad 6.

Mějme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme zapsat ve taru $Ax = b$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ověříme, že je matice A regulární:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Determinant je roven 0, proto nebudeme pokračovat v LU-rozkladu. Soustava rovnic nemá řešení.

Doposud jsme měli soustavy rovnic s pouze jedním vektorem pravých stran, avšak LU-rozklad se především používá v případech, kdy máme více vektorů pravých stran $b^{(i)}$ a pro ně hledáme různá řešení $x^{(i)}$. V následujících příkladech budou zadány dva vektory pravých stran, ale může jich být i více.

Při řešení provedeme LU-rozklad jako doposud a získáme matice L a U. Dále budeme pracovat s jednotlivými vektorypravých stran samostatně.

Nejprve pracujeme s vektorem pravých stran $b^{(1)}$ a pro něj získáme řešení $x^{(1)}$:
1. $Ly^{(1)} = b^{(1)}$
2. $Ux^{(1)} = y^{(1)}$
Pro zadanou soustavu ravnic s vektorem pravých stran $b^{(1)}$ získáme řešení $x^{(1)}$.

Následně pracujeme s vektorem pravých stran $b^{(2)}$ a pro něj získáme řešení $x^{(2)}$:
1. $Ly^{(2)} = b^{(2)}$
2. $Ux^{(2)} = y^{(2)}$
Pro zadanou soustavu rovnic s vektorem pravých stran $b^{(2)}$ získáme řešení $x^{(2)}$.

Příklad 7.

Mějme soustavu rovnic s vektorem pravých stran $b^{(1)} = (3,0,4)^T$ a $b^{(2)} = (1,1,0)^T$:

$$\begin{aligned} 3x_1^{(i)} + 5x_2^{(i)} + 4x_3^{(i)} &= b_1^{(i)} \\ 6x_1^{(i)} + 2x_2^{(i)} + 8x_3^{(i)} &= b_2^{(i)} \\ x_1^{(i)} + 7x_2^{(i)} + 9x_3^{(i)} &= b_3^{(i)} \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme zapsat ve taru $Ax^{(i)} = b^{(i)}$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \\ b_3^{(i)} \end{pmatrix}$$

Ověříme, že je matice A regulární:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -184$$

Nyní můžeme začít upravovat matici A:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 0 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{3}) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} & \frac{23}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{2}{3} \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$m_{21} = -2 \qquad m_{31} = -\frac{1}{3} \qquad m_{32} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{3} \end{pmatrix}$$

Nyní sestavíme matici L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Matici U jsme získali úpravou matice A:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{3} \end{pmatrix}$$

Pro ověření můžeme provést kontrolu $A = L \cdot U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Nejprve pracujeme s vektorem pravých stran $b^{(1)} = (3, 0, 4)^T$ a pro něj získáme řešení $x^{(1)}$:

1. využijeme vztahu $Ly^{(1)} = b^{(1)}$ a vypočítáme $y^{(1)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1^{(1)} = 3 \\ 2y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 0 \Rightarrow y_2^{(1)} = -6 \\ \frac{1}{3}y_1^{(1)} - \frac{2}{3}y_2^{(1)} + y_3^{(1)} = 4 \Rightarrow y_3^{(1)} = -1 \end{array}$$

2. ze vztahu $Ux^{(1)} = y^{(1)}$ vypočítáme $x^{(1)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{23}{3} & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} 3x_1^{(1)} + 5x_2^{(1)} + 4x_3^{(1)} = 3 \Rightarrow x_1^{(1)} = -\frac{7}{92} \\ -8x_2^{(1)} = -6 \Rightarrow x_2^{(1)} = \frac{3}{4} \\ \frac{23}{3}x_3^{(1)} = -1 \Rightarrow x_3^{(1)} = -\frac{3}{23} \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic s vektorem pravých stran $b^{(1)}$ jsme získali řešení $x^{(1)} = [-7/92, 3/4, -3/23]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Nyní budeme pracovat s vektorem pravých stran $b^{(2)} = (1, 1, 0)^T$ a pro něj získáme řešení $x^{(2)}$:

1. využijeme vztahu $Ly^{(2)} = b^{(2)}$ a vypočítáme $y^{(2)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1^{(2)} = 1 \\ 2y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = 1 \Rightarrow y_2^{(2)} = -1 \\ \frac{1}{3}y_1^{(2)} - \frac{2}{3}y_2^{(2)} + y_3^{(2)} = 0 \Rightarrow y_3^{(2)} = -1 \end{array}$$

2. ze vztahu $Ux^{(2)} = y^{(2)}$ vypočítáme $x^{(2)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{23}{3} & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} 3x_1^{(2)} + 5x_2^{(2)} + 4x_3^{(2)} = 1 \Rightarrow x_1^{(2)} = \frac{55}{184} \\ -8x_2^{(2)} = -1 \Rightarrow x_2^{(2)} = \frac{1}{8} \\ \frac{23}{3}x_3^{(2)} = -1 \Rightarrow x_3^{(2)} = -\frac{3}{23} \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic s vektorem pravých stran $b^{(2)}$ jsme získali řešení $x^{(2)} = [55/184, 1/8, -3/23]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Příklad 8.

Mějme soustavu rovnic s vektorem pravých stran $b^{(1)} = (-1, 2, 0)^T$ a $b^{(2)} = (2/5, 27/20, 0)^T$:

$$\begin{aligned} 2x_1^{(i)} + 4x_2^{(i)} + 6x_3^{(i)} &= b_1^{(i)} \\ -2x_1^{(i)} + 3x_2^{(i)} + x_3^{(i)} &= b_2^{(i)} \\ 5x_1^{(i)} + 6x_2^{(i)} + 2x_3^{(i)} &= b_3^{(i)} \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme zapsat ve taru $Ax^{(i)} = b^{(i)}$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} \\ b_1^{(i)} \\ b_1^{(i)} \end{pmatrix}$$

Ověříme, že je matice A regulární:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -126$$

Nyní můžeme začít upravovat matici A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 7 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{5}{2}) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & -4 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\frac{4}{7} \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$m_{21} = 1 \qquad m_{31} = -\frac{5}{2} \qquad m_{32} = \frac{4}{7}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Nyní sestavíme matici L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

Matici U jsme získali úpravou matice A:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Pro ověření můžeme provést kontrolu $A = L \cdot U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Nejprve pracujeme s vektorem pravých stran $b^{(1)} = (-1, 2, 0)^T$ a pro něj získáme řešení $x^{(1)}$:

1. využijeme vztahu $Ly^{(1)} = b^{(1)}$ a vypočítáme $y^{(1)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ \frac{5}{2} & -\frac{4}{7} & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1^{(1)} = -1 \\ -y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 2 \Rightarrow y_2^{(1)} = 1 \\ \frac{5}{2}y_1^{(1)} - \frac{4}{7}y_2^{(1)} + y_3^{(1)} = 0 \Rightarrow y_3^{(1)} = \frac{43}{14} \end{array}$$

2. ze vztahu $Ux^{(1)} = y^{(1)}$ vypočítáme $x^{(1)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & \frac{43}{14} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} 2x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} + 6x_3^{(1)} = -1 \Rightarrow x_1^{(1)} = -\frac{4}{9} \\ 7x_2^{(1)} + 7x_3^{(1)} = 1 \Rightarrow x_2^{(1)} = \frac{61}{126} \\ -9x_3^{(1)} = \frac{43}{14} \Rightarrow x_3^{(1)} = -\frac{43}{126} \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic s vektorem pravých stran $b^{(1)}$ jsme získali řešení $x^{(1)} = [-4/9, 61/126, -43/126]$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Nyní budeme pracovat s vektorem pravých stran $b^{(2)} = (2/5, 27/20, 0)^T$ a pro něj získáme řešení $x^{(2)}$:

1. využijeme vztahu $Ly^{(2)} = b^{(2)}$ a vypočítáme $y^{(2)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ -1 & 1 & 0 & \frac{27}{20} \\ \frac{5}{2} & -\frac{4}{7} & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1^{(2)} = \frac{2}{5} \\ -y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = \frac{27}{20} \Rightarrow y_2^{(2)} = \frac{7}{4} \\ \frac{5}{2}y_1^{(2)} - \frac{4}{7}y_2^{(2)} + y_3^{(2)} = 0 \Rightarrow y_3^{(2)} = 0 \end{array}$$

2. ze vztahu $Ux^{(2)} = y^{(2)}$ vypočítáme $x^{(2)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & \frac{2}{5} \\ 0 & 7 & 7 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} 2x_1^{(2)} + 4x_2^{(2)} + 6x_3^{(2)} = \frac{2}{5} \Rightarrow x_1^{(2)} = -\frac{3}{10} \\ 7x_2^{(2)} + 7x_3^{(2)} = \frac{7}{4} \Rightarrow x_2^{(2)} = \frac{1}{4} \\ -9x_3^{(2)} = 0 \Rightarrow x_3^{(2)} = 0 \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic s vektorem pravých stran $b^{(2)}$ jsme získali řešení $x^{(2)} = [-3/10, 1/4, 0]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Příklad 9.

Mějme soustavu rovnic s vektory pravých stran $b^{(1)} = (1,2,1)^T$ a $b^{(2)} = (1,4,13)^T$:

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} + 3x_2^{(i)} + 2x_3^{(i)} &= b_1^{(i)} \\ 4x_1^{(i)} + 5x_2^{(i)} + x_3^{(i)} &= b_2^{(i)} \\ 6x_1^{(i)} + 2x_2^{(i)} + 3x_3^{(i)} &= b_3^{(i)} \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme zapsat ve taru $Ax^{(i)} = b^{(i)}$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \\ b_3^{(i)} \end{pmatrix}$$

Ověříme, že je matice A regulární:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -49$$

Nyní můžeme začít upravovat matici A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-4) \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-6) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -16 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{16}{7}) \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$m_{21} = -4 \qquad m_{31} = -6 \qquad m_{32} = -\tfrac{16}{7}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Nyní sestavíme matici L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & \frac{16}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

Matici U jsme získali úpravou matice A:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Pro ověření můžeme provést kontrolu $A = L \cdot U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & \frac{16}{7} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Nejprve pracujeme s vektorem pravých stran $b^{(1)} = (1,2,1)^T$ a pro něj získáme řešení $x^{(1)}$:

1. využijeme vztahu $Ly^{(1)} = b^{(1)}$ a vypočítáme $y^{(1)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & \frac{16}{7} & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1^{(1)} = 1 \\ 4y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 2 \Rightarrow y_2^{(1)} = -2 \\ 6y_1^{(1)} + \frac{16}{7}y_2^{(1)} + y_3^{(1)} = 1 \Rightarrow y_3^{(1)} = -\frac{3}{7} \end{array}$$

2. ze vztahu $Ux^{(1)} = y^{(1)}$ vypočítáme $x^{(1)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -\frac{3}{7} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x_1^{(1)} + 3x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)} = 1 \Rightarrow x_1^{(1)} = \frac{4}{49} \\ -7x_2^{(1)} - 7x_3^{(1)} = -2 \Rightarrow x_2^{(1)} = \frac{17}{49} \\ 7x_3^{(1)} = -\frac{3}{7} \Rightarrow x_3^{(1)} = -\frac{3}{49} \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic s vektorem pravých stran $b^{(1)}$ jsme získali řešení $x^{(1)} = [4/49, 17/49, -3/49]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Nyní budeme pracovat s vektorem pravých stran $b^{(2)} = (1,4,13)^T$ a pro něj získáme řešení $x^{(2)}$:

1. využijeme vztahu $Ly^{(2)} = b^{(2)}$ a vypočítáme $y^{(2)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \\ 6 & \frac{16}{7} & 1 & 13 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1^{(2)} = 1 \\ 4y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = 4 \Rightarrow y_2^{(2)} = 0 \\ 6y_1^{(2)} + \frac{16}{7}y_2^{(2)} + y_3^{(2)} = 13 \Rightarrow y_3^{(2)} = 7 \end{array}$$

2. ze vztahu $Ux^{(2)} = y^{(2)}$ vypočítáme $x^{(2)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x_1^{(2)} + 3x_2^{(2)} + 2x_3^{(2)} = 1 \Rightarrow x_1^{(2)} = 2 \\ -7x_2^{(2)} - 7x_3^{(2)} = 0 \Rightarrow x_2^{(2)} = -1 \\ 7x_3^{(2)} = 7 \Rightarrow x_3^{(2)} = 1 \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic s vektorem pravých stran $b^{(2)}$ jsme získali řešení $x^{(2)} = [2, -1, 1]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Příklad 10.

Mějme soustavu rovnic s vektory pravých stran $b^{(1)} = (0,1,2)^T$ a $b^{(2)} = (2,5,-1)^T$:

$$\begin{aligned} 2x_1^{(i)} + 4x_2^{(i)} + x_3^{(i)} &= b_1^{(i)} \\ 3x_1^{(i)} + 5x_2^{(i)} + 6x_3^{(i)} &= b_2^{(i)} \\ x_1^{(i)} + 4x_2^{(i)} + 3x_3^{(i)} &= b_3^{(i)} \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme zapsat ve taru $Ax^{(i)} = b^{(i)}$ tedy:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \\ b_3^{(i)} \end{pmatrix}$$

Ověříme, že je matice A regulární:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -23$$

Nyní můžeme začít upravovat matici A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{3}{2}) \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim$$

$$m_{21} = -\frac{3}{2} \qquad m_{31} = -\frac{1}{2} \qquad m_{32} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

Nyní sestavíme matici L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici U jsme získali úpravou matice A:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

Pro ověření můžeme provést kontrolu $A = L \cdot U$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{23}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Nejprve pracujeme s vektorem pravých stran $b^{(1)} = (0, 1, 2)^T$ a pro něj získáme řešení $x^{(1)}$:

1. využijeme vztahu $Ly^{(1)} = b^{(1)}$ a vypočítáme $y^{(1)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1^{(1)} = 0 \\ \frac{3}{2}y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = 1 \Rightarrow y_2^{(1)} = 1 \\ \frac{1}{2}y_1^{(1)} - 2y_2^{(1)} + y_3^{(1)} = 2 \Rightarrow y_3^{(1)} = 4 \end{array}$$

2. ze vztahu $Ux^{(1)} = y^{(1)}$ vypočítáme $x^{(1)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{23}{2} & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} 2x_1^{(1)} + 4x_2^{(1)} + x_3^{(1)} = 0 \Rightarrow x_1^{(1)} = -\frac{30}{23} \\ -x_2^{(1)} + \frac{9}{2}x_3^{(1)} = 1 \Rightarrow x_2^{(1)} = \frac{13}{23} \\ \frac{23}{2}x_3^{(1)} = 4 \Rightarrow x_3^{(1)} = \frac{8}{23} \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic s vektorem pravých stran $b^{(1)}$ jsme získali řešení $x^{(1)} = [-30/23, 13/23, 8/23]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Nyní budeme pracovat s vektorem pravých stran $b^{(2)} = (2, 5, -1)^T$ a pro něj získáme řešení $x^{(2)}$:

1. využijeme vztahu $Ly^{(2)} = b^{(2)}$ a vypočítáme $y^{(2)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 5 \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} y_1^{(2)} = 2 \\ \frac{3}{2}y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = 5 \Rightarrow y_2^{(2)} = 2 \\ \frac{1}{2}y_1^{(2)} - 2y_2^{(2)} + y_3^{(2)} = -1 \Rightarrow y_3^{(2)} = 2 \end{array}$$

2. ze vztahu $Ux^{(2)} = y^{(2)}$ vypočítáme $x^{(2)}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & \frac{9}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{23}{2} & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} 2x_1^{(2)} + 4x_2^{(2)} + x_3^{(2)} = 2 \Rightarrow x_1^{(2)} = \frac{77}{23} \\ -x_2^{(2)} + \frac{9}{2}x_3^{(2)} = 2 \Rightarrow x_2^{(2)} = -\frac{28}{23} \\ \frac{23}{2}x_3^{(2)} = 2 \Rightarrow x_3^{(2)} = \frac{4}{23} \end{array}$$

Pro zadanou soustavu rovnic s vektorem pravých stran $b^{(2)}$ jsme získali řešení $x^{(2)} = [77/23, -28/23, 4/23]^T$. Dosazením do rovnic lze správnost řešení ověřit.

Použitá literatura

Mgr. HINTERLEITNER, Irena , Ph.D.; RNDr. PŘIBYL, Oto: MATEMATIKA I, Vybrané kapitoly z numerických výpočtů, Akademické nakladatelství CERM s.r.o. Brno, Brno 2016

Za spolupráce a pod vedením Mgr. Ireny Hinterleitner, Ph.D., které tímto děkuji.

V Brně 2016