# NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

## LU ROZKLAD MATICE

– Čtvercovou regulární matici $A$ řádu 3 rozložíme na součin

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U}, \text{ kde}$$

- $U$ je horní trojúhelníková matice, která vznikne převedením matice $A$ na schodovitý tvar,
- $L$ je dolní trojúhelníková matice tvořena jedničkami na hlavní diagonále a všemi násobky (multiplikátory) použitými při úpravě matice $A$ s opačným znaménkem.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

– Výpočet matice $U$:

*1. krok:* Vhodné násobky 1. řádku přičteme k 2. a 3. řádku tak, abychom v 1. sloupci pod 1. řádkem dostali nuly.

*2. krok:* Vhodný násobek 2. řádku přičteme k 3. řádku tak, abychom v 2. sloupci pod 2. řádkem dostali nulu.

$\Rightarrow$ Při převodu matice $A$ na schodovitý tvar
- smíme pouze přičítat násobek řádku k řádkům pod ním tak, abychom matici $A$ převedli na schodovitý tvar;
- **nesmíme** zaměňovat řádky, vynásobit řádek nějakým číslem, přičítat násobek řádku k řádku nad ním.

## ŘEŠENÍ SLAR POMOCÍ LU ROZKLADU

– Hledáme řešení soustavy $A \cdot X = B$, kde $A$ je regulární matice.
– Využíváme k řešení série soustav se stejnou maticí soustavy a různými vektory pravých stran.

– **Postup:**

$$\underbrace{A}_{L\cdot U} \cdot X = B$$

$$\downarrow$$

$$L \cdot \underbrace{U \cdot X}_{Y} = B \qquad \longrightarrow \qquad 1. \quad L \cdot Y = B \qquad \longrightarrow \qquad Y$$

$$2. \quad U \cdot X = Y \qquad \longrightarrow \qquad X$$

**Příklad:** Určete $LU$ rozklad matice $A$ a ověřte správnost výpočtu.

**a)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & 15 \\ -1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ DÚ

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & 15 \\ -1 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-2) \; /\cdot\frac{1}{3} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

ZK:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 6 & -12+5 & 18-3 \\ -1 & 2+4 & -3-\frac{12}{5}+\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & 15 \\ -1 & 6 & -5 \end{pmatrix} = A$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot 1 \; /\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & -4 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot\frac{4}{7} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

ZK:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -\frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -4+7 & -6+7 \\ 5 & 10-4 & 15-4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = A$$

**Příklad:** Pomocí $LU$ rozkladu řešte soustavu $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{a) } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b) } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ DÚ}$$

• LU ROZKLAD:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-2) \ /\cdot 1 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U \quad ; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• ŘEŠENÍ SOUSTAVY $A \cdot X = B$

a) 1. $L \cdot Y = B$:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ 2y_1 + y_2 &= 2 \Rightarrow y_2 = 2 - 2y_1 = 2 - 2\cdot 1 = 0 \\ -y_1 + y_3 &= 0 \Rightarrow y_3 = y_1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $U \cdot X = Y$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \Rightarrow x_1 = 1 + 2x_2 = 1 + 2\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{3} \\ 3x_2 + x_3 &= 0 \Rightarrow x_2 = -\tfrac{1}{3}x_3 = -\tfrac{1}{3}\cdot(-1) = \tfrac{1}{3} \\ -x_3 &= 1 \Rightarrow x_3 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$K = \left\{ \left( \tfrac{5}{3}, \tfrac{1}{3}, -1 \right)^T \right\}$$

b) 1. $L \cdot Y = B$:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ 2y_1 + y_2 &= 1 \Rightarrow y_2 = 1 - 2y_1 = 1 - 2\cdot 0 = 1 \\ -y_1 + y_3 &= 2 \Rightarrow y_3 = 2 + y_1 = 2 + 0 = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. $U \cdot X = Y$:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2 = 2\cdot 1 = 2 \\ 3x_2 + x_3 &= 1 \Rightarrow x_2 = \tfrac{1}{3}(1 - x_3) = \tfrac{1}{3}(1+2) = 1 \\ -x_3 &= 2 \Rightarrow x_3 = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$K = \left\{ (2, 1, -2)^T \right\}$$

# LU ROZKLAD MATICE S ČÁSTEČNÝM VÝBĚREM HLAVNÍHO PRVKU

– $A$ je čtvercová regulární matice řádu 3.

– Výpočet matice $U$ je stejný jako u $LU$ rozkladu (bez výběru hlavního prvku), ale navíc:

- Před *1. krokem* vybereme v 1. sloupci prvek s největší absolutní hodnotou. Řádek, který tento prvek obsahuje, přesuneme na první místo.
- Před *2. krokem* vybereme v 2. sloupci pod 1. řádkem prvek s největší absolutní hodnotou. Řádek, který tento prvek obsahuje, přesuneme na druhé místo.

$\rightarrow$ $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U}$, kde

- $P$ je permutační matice, která vznikne z jednotkové matice $E$ prohozením stejných řádků, jako u matice $A$ při převodu na schodovitý tvar,
- $L$ je dolní trojúhelníková matice tvořena jedničkami na hlavní diagonále a všemi násobky (multiplikátory) použitými při úpravě matice $A$ s opačným znaménkem,
- $U$ je horní trojúhelníková matice, která vznikne převedením matice $A$ na schodovitý tvar.

**Příklad:** Určete $LU$ rozklad s částečným výběrem hlavního prvku matice $A$ a ověřte správnost výpočtu.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \big| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \big| \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim^{*} \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \big| \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \sim$$

VYBEREME PRVEK S NEJVĚTŠÍ ABSOLUTNÍ HODNOTOU

* PROTOŽE JE 2 MÉNĚ NEŽ 6, DOJDE K PROHOZENÍ 2. A 3. ŘÁDKU, TENTO KROK ZAPŘÍČINÍ PROHOZENÍ MULTIPLIKÁTORŮ $m_{21}$ A $m_{31}$ V MATICI L.

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = U \quad ; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P}}$$

ZK:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -1 & -2+6 & 3 \\ 2 & 4+2 & 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

4,5

# ŘEŠENÍ SLAR POMOCÍ LU ROZKLADU S ČÁSTEČNÝM VÝBĚREM HLAVNÍHO PRVKU

– Hledáme řešení soustavy $A \cdot X = B$, kde $A$ je regulární matice.
– Slouží ke zmenšení zaokrouhlovacích chyb.

– **Postup:**

$$A \cdot X = B$$
$$\downarrow$$
$$\underbrace{P \cdot A}_{L \cdot U} \cdot X = P \cdot B$$
$$\downarrow$$
$$L \cdot \underbrace{U \cdot X}_{Y} = P \cdot B \quad \longrightarrow \quad 1.\quad L \cdot Y = P \cdot B \quad \longrightarrow \quad Y$$
$$2.\quad U \cdot X = Y \quad \longrightarrow \quad X$$

**Příklad:** Pomocí $LU$ rozkladu s částečným výběrem hlavního prvku řešte soustavu $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- LU ROZKLAD: – VIZ PŘEDCHOZÍ PŘÍKLAD
- ŘEŠENÍ SOUSTAVY $A \cdot X = B$

$$P \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. $L \cdot Y = P \cdot B$

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = -4 & \\ -\frac{1}{4}y_1 + y_2 = -8 & \Rightarrow y_2 = -8 + \frac{1}{4}y_1 = -8 + \frac{1}{4}(-4) = 9 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 1 & \Rightarrow y_3 = 1 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{3}y_2 = 1 - \frac{1}{2}(-4) - \frac{1}{3}(-9) = 1 + 2 + 3 = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. $U \cdot X = Y$

$$\left.\begin{array}{ll} 4x_1 + 8x_2 = -4 & \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}(-4 - 8x_2) = -1 - 2x_2 = -1 - 2(-2) = 3 \\ 6x_2 + 3x_3 = -9 & \Rightarrow x_2 = \frac{1}{6}(-9 - 3x_3) = \frac{1}{2}(-3 - x_3) = \frac{1}{2}(-3 - \frac{1}{3}) = -2 \\ 6x_3 = 6 & \Rightarrow x_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \{ (3, -2, 1)^T \}$$