FAKULTA STAVEBNÍ
ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Matematika 1

LU–rozklad matice

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši,
ale klávesy [PageUp] a [PageDown] nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2016

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

1. Definice LU–rozkladu (*čtvercové, ne nutně regulární*) matice *A*

Dolní (angl. *lower*) trojúhelníková [1] matice $\boldsymbol{L}$ s jednotkami v hlavní diagonále a horní (angl. *upper*) trojúhelníková [2] matice $\boldsymbol{U}$ tvoří *LU–rozklad* čtvercové matice $\boldsymbol{A}$, je-li $\boldsymbol{A}$ součinem matic $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{U}$ (v tomto pořadí),

$$\boldsymbol{A}(a_{i;j}) = \boldsymbol{L}(l_{i;j}) \bullet \boldsymbol{U}(u_{i;j}),$$

nebo jinak

$$\begin{bmatrix} a_{1;1} & \dots & a_{1;m} & \dots & a_{1;n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m;1} & \dots & a_{m;m} & \dots & a_{m;n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n;1} & \dots & a_{n;m} & \dots & a_{n;n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ l_{m;1} & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n;1} & \dots & l_{n;m} & \dots & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a_{1;1} & \dots & a_{1;m} & \dots & a_{1;n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & u_{m;m} & \dots & u_{m;n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & u_{n;n} \end{bmatrix}$$

Vidíme, že horní trojúhelníková matice $\boldsymbol{U}$ je vlastně ***schodovitý tvar*** původní matice $\boldsymbol{A}$. Tento ***převod*** matice $\boldsymbol{A}$ budeme provádět ***jediným*** typem eliminační úpravy: **přičtení *m*–násobku nějakého řádku k jinému, který je napsán pod ním.** Tuto úpravu lze „emulovat“ násobením zleva vhodnou maticí:

$$A \sim {}^1A = \underbrace{{}^1L \bullet A}_{{}^1A} \sim {}^2A = \underbrace{{}^2L \bullet ({}^1L \bullet A)}_{{}^2A} = \underbrace{({}^2L \bullet {}^1L) \bullet A}_{{}^2A} \sim {}^3A = \dots = \underbrace{({}^{s-1}L \bullet \cdots \bullet {}^2L \bullet {}^1L) \bullet A}_{{}^{s-1}A} \sim {}^sA$$

a tedy (kde závorku na levé straně si označíme L^{-1} a ${}^sA$ je schodovitý tvar matice A, tj. matice $\boldsymbol{U}$)

$$\underbrace{\overbrace{({}^sL \bullet \cdots \bullet {}^2L \bullet {}^1L)}^{L^{-1}} \bullet A}_{{}^sA} = \overbrace{{}^sA}^{U}$$

$$L^{-1} \bullet A = U \quad | \, L \bullet (zleva)$$

$$\underbrace{L \bullet L^{-1}}_{E} \bullet A = L \bullet U$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$$

---

[1] Je čtvercová matice s nenulovými prvky pouze NAD hlavní diagonálou.

[2] Je čtvercová matice s nenulovými prvky pouze POD hlavní diagonálou.

Konkrétně pro čtvercovou matici řádu 3 má dříve uvedený algoritmus následující podobu.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3}\\ a_{2;1} & a_{2;2} & a_{2;3}\\ a_{3;1} & a_{3;2} & a_{3;3}\end{bmatrix}$$

1. krok: Vhodné násobky 1. řádku matice $\boldsymbol{A}$ postupně příčítáme k řádkům ležícím pod ním tak, abychom v 1. sloupci matice ${}^1\boldsymbol{A}$ místo prvků $a_{2;1}$ a $a_{3;1}$ dostali NULY (${}^1a_{2;1}=0$, ${}^1a_{3;1}=0$). Tyto násobky (násobení, též *multiplikace*) nazveme multiplikátory a budeme označovat písmenem $\boldsymbol{m}$. Například $m_{2;1}$ bude multiplikátor, kterým v 1. kroku (nulujeme 1. sloupec) „vynulujeme“ prvek $a_{2;1}$.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3}\\ a_{2;1} & a_{2;2} & a_{2;3}\\ a_{3;1} & a_{3;2} & a_{3;3}\end{bmatrix} \cdot m_{2;1} \quad \cdot m_{3;1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0\\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1\end{bmatrix} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3}\\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3}\\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3}\end{bmatrix}}_{{}^1\boldsymbol{A}} =$$

2. krok: Vhodné násobky 2. řádku matice ${}^1\boldsymbol{A}$ … tak, abychom ve 2. sloupci matice ${}^2\boldsymbol{A}$ (pod ním) dostali NULY.

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0\\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3}\\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3}\\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3}\end{bmatrix} \cdot m_{3;2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0\\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ {}^2l_{2;1} & 1 & 0\\ {}^2l_{3;1} & {}^2l_{3;2} & 1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{L}} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3}\\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3}\\ 0 & 0 & {}^2a_{3;3}\end{bmatrix}}_{{}^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}}$$

krok

A nyní totéž s čísly.

1. krok:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&3&2\\3&7&-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\{}^{1}l_{2;1}&1&0\\{}^{1}l_{3;1}&{}^{1}l_{3;2}&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&{}^{1}a_{2;2}&{}^{1}a_{2;3}\\0&{}^{1}a_{3;2}&{}^{1}a_{3;3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}\bullet\overbrace{\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&&\\0&&\end{bmatrix}}^{{}^{1}\boldsymbol{A}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2$

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ \\ \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^{1}l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^{1}l_{3;1} & {}^{1}l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & {}^{1}a_{2;2} & {}^{1}a_{2;3} \\ 0 & {}^{1}a_{3;2} & {}^{1}a_{3;3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & & \end{bmatrix}}^{{}^{1}\boldsymbol{A}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \ \cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}^{{}^1\boldsymbol{A}}$$

Zbývá dopočítat prvky ${}^1l_{2;1}, {}^1l_{3;1}, {}^1l_{3;2}$ matice ${}^1\boldsymbol{L}$. Tečka mezi řádkovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor ze 2. řádku matice ${}^1\boldsymbol{L}$) a sloupcovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor z 1. sloupce matice ${}^1\boldsymbol{A}$) označuje skalární součin těchto vektorů.

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}^{{}^1\boldsymbol{A}}$$

Zbývá dopočítat prvky ${}^1l_{2;1}, {}^1l_{3;1}, {}^1l_{3;2}$ matice ${}^1\boldsymbol{L}$. Tečka mezi řádkovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor ze 2. řádku matice ${}^1\boldsymbol{L}$) a sloupcovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor z 1. sloupce matice ${}^1\boldsymbol{A}$) označuje skalární součin těchto vektorů.

$$a_{2;1} = 2 = \begin{bmatrix} {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 2 = ({}^1l_{2;1} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \quad \Longrightarrow \quad 2 = {}^1l_{2;1}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & & 1 \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}^{{}^1\boldsymbol{A}}$$

Zbývá dopočítat prvky ${}^1l_{2;1}, {}^1l_{3;1}, {}^1l_{3;2}$ matice ${}^1\boldsymbol{L}$. Tečka mezi řádkovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor ze 2. řádku matice ${}^1\boldsymbol{L}$) a sloupcovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor z 1. sloupce matice ${}^1\boldsymbol{A}$) označuje skalární součin těchto vektorů.

$$a_{2;1} = 2 = \begin{bmatrix} {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 2 = ({}^1l_{2;1} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \quad \Longrightarrow \quad 2 = {}^1l_{2;1}$$

$$a_{3;1} = 3 = \begin{bmatrix} {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 3 = ({}^1l_{3;1} \cdot 1) + ({}^1l_{3;2} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \quad \Longrightarrow \quad 3 = {}^1l_{3;1}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}^{{}^1\boldsymbol{A}}$$

Zbývá dopočítat prvky ${}^1l_{2;1}, {}^1l_{3;1}, {}^1l_{3;2}$ matice ${}^1\boldsymbol{L}$. Tečka mezi řádkovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor ze 2. řádku matice ${}^1\boldsymbol{L}$) a sloupcovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor z 1. sloupce matice ${}^1\boldsymbol{A}$) označuje skalární součin těchto vektorů.

$$a_{2;1} = 2 = \begin{bmatrix} {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 2 = ({}^1l_{2;1} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \quad \Longrightarrow \quad 2 = {}^1l_{2;1}$$

$$a_{3;1} = 3 = \begin{bmatrix} {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 3 = ({}^1l_{3;1} \cdot 1) + ({}^1l_{3;2} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \quad \Longrightarrow \quad 3 = {}^1l_{3;1}$$

$$a_{3;2} = 7 = \begin{bmatrix} {}^1l_{3;1}(=3) & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 7 = (3 \cdot 2) + [{}^1l_{3;2} \cdot (-1)] + (1 \cdot 1) \quad \Longrightarrow \quad 0 = {}^1l_{3;1}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}^{{}^1\boldsymbol{A}}$$

Zbývá dopočítat prvky ${}^1l_{2;1}, {}^1l_{3;1}, {}^1l_{3;2}$ matice ${}^1\boldsymbol{L}$. Tečka mezi řádkovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor ze 2. řádku matice ${}^1\boldsymbol{L}$) a sloupcovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor z 1. sloupce matice ${}^1\boldsymbol{A}$) označuje skalární součin těchto vektorů.

$$a_{2;1} = 2 = \begin{bmatrix} {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies 2 = ({}^1l_{2;1} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \implies 2 = {}^1l_{2;1}$$

$$a_{3;1} = 3 = \begin{bmatrix} {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies 3 = ({}^1l_{3;1} \cdot 1) + ({}^1l_{3;2} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \implies 3 = {}^1l_{3;1}$$

$$a_{3;2} = 7 = \begin{bmatrix} {}^1l_{3;1}(= 3) & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies 7 = (3 \cdot 2) + [{}^1l_{3;2} \cdot (-1)] + (1 \cdot 1) \implies 0 = {}^1l_{3;1}$$

2. krok:

dále upravujeme matici ${}^1\boldsymbol{A}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^2l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^2l_{3;1} & {}^2l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \right\}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}^{{}^1\boldsymbol{A}}$$

Zbývá dopočítat prvky ${}^1l_{2;1}, {}^1l_{3;1}, {}^1l_{3;2}$ matice ${}^1\boldsymbol{L}$. Tečka mezi řádkovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor ze 2. řádku matice ${}^1\boldsymbol{L}$) a sloupcovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor z 1. sloupce matice ${}^1\boldsymbol{A}$) označuje skalární součin těchto vektorů.

$$a_{2;1} = 2 = \left[\, {}^1l_{2;1} \quad 1 \quad 0 \,\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 2 = ({}^1l_{2;1} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \quad \Longrightarrow \quad 2 = {}^1l_{2;1}$$

$$a_{3;1} = 3 = \left[\, {}^1l_{3;1} \quad {}^1l_{3;2} \; 1 \,\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 3 = ({}^1l_{3;1} \cdot 1) + ({}^1l_{3;2} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \quad \Longrightarrow \quad 3 = {}^1l_{3;1}$$

$$a_{3;2} = 7 = \left[\, {}^1l_{3;1}(= 3) \quad {}^1l_{3;2} \quad 1 \,\right] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow 7 = (3 \cdot 2) + [{}^1l_{3;2} \cdot (-1)] + (1 \cdot 1) \;\Longrightarrow\; 0 = {}^1l_{3;1}$$

2. krok: $m_{3;2} = 1$ dále upravujeme matici ${}^1\boldsymbol{A}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(1) \\ \rfloor \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^2l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^2l_{3;1} & {}^2l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \cdot(-3) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}^{{}^1\boldsymbol{A}}$$

Zbývá dopočítat prvky ${}^1l_{2;1}, {}^1l_{3;1}, {}^1l_{3;2}$ matice ${}^1\boldsymbol{L}$. Tečka mezi řádkovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor ze 2. řádku matice ${}^1\boldsymbol{L}$) a sloupcovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor z 1. sloupce matice ${}^1\boldsymbol{A}$) označuje skalární součin těchto vektorů.

$$a_{2;1} = 2 = \begin{bmatrix} {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies 2 = ({}^1l_{2;1} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \implies 2 = {}^1l_{2;1}$$

$$a_{3;1} = 3 = \begin{bmatrix} {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies 3 = ({}^1l_{3;1} \cdot 1) + ({}^1l_{3;2} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \implies 3 = {}^1l_{3;1}$$

$$a_{3;2} = 7 = \begin{bmatrix} {}^1l_{3;1}(= 3) & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies 7 = (3 \cdot 2) + [{}^1l_{3;2} \cdot (-1)] + (1 \cdot 1) \implies 0 = {}^1l_{3;1}$$

2. krok: $m_{3;2} = 1$ dále upravujeme matici ${}^1\boldsymbol{A}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot(1) \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^2l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^2l_{3;1} & {}^2l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$${}^1a_{2;1} = 0 = [\ \ldots \implies {}^2l_{2;1} = 0$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}^{{}^1\boldsymbol{A}}$$

Zbývá dopočítat prvky ${}^1l_{2;1}, {}^1l_{3;1}, {}^1l_{3;2}$ matice ${}^1\boldsymbol{L}$. Tečka mezi řádkovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor ze 2. řádku matice ${}^1\boldsymbol{L}$) a sloupcovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor z 1. sloupce matice ${}^1\boldsymbol{A}$) označuje skalární součin těchto vektorů.

$$a_{2;1} = 2 = [\, {}^1l_{2;1} \quad 1 \quad 0 \,] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 2 = ({}^1l_{2;1} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \quad \Longrightarrow \quad 2 = {}^1l_{2;1}$$

$$a_{3;1} = 3 = [\, {}^1l_{3;1} \quad {}^1l_{3;2} \; 1 \,] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 3 = ({}^1l_{3;1} \cdot 1) + ({}^1l_{3;2} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \quad \Longrightarrow \quad 3 = {}^1l_{3;1}$$

$$a_{3;2} = 7 = [\, {}^1l_{3;1}(= 3) \quad {}^1l_{3;2} \quad 1 \,] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow 7 = (3 \cdot 2) + [{}^1l_{3;2} \cdot (-1)] + (1 \cdot 1) \Longrightarrow 0 = {}^1l_{3;1}$$

2. krok: $m_{3;2} = 1$ dále upravujeme matici ${}^1\boldsymbol{A}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(1) \\ \rfloor \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^2l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^2l_{3;1} & {}^2l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$${}^1a_{2;1} = 0 = [\, \ldots \quad \Longrightarrow \quad {}^2l_{2;1} = 0, \quad {}^2l_{3;1} = 0$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}^{{}^1\boldsymbol{A}}$$

Zbývá dopočítat prvky ${}^1l_{2;1}$, ${}^1l_{3;1}$, ${}^1l_{3;2}$ matice ${}^1\boldsymbol{L}$. Tečka mezi řádkovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor ze 2. řádku matice ${}^1\boldsymbol{L}$) a sloupcovým vektorem (pro prvek $a_{2;1}$ vektor z 1. sloupce matice ${}^1\boldsymbol{A}$) označuje skalární součin těchto vektorů.

$$a_{2;1} = 2 = \left[\, {}^1l_{2;1} \quad 1 \quad 0 \,\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies 2 = ({}^1l_{2;1} \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 0) \implies 2 = {}^1l_{2;1}$$

$$a_{3;1} = 3 = \left[\, {}^1l_{3;1} \quad {}^1l_{3;2} \; 1 \,\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies 3 = ({}^1l_{3;1} \cdot 1) + ({}^1l_{3;2} \cdot 0) + (1 \cdot 0) \implies 3 = {}^1l_{3;1}$$

$$a_{3;2} = 7 = \left[\, {}^1l_{3;1}(= 3) \quad {}^1l_{3;2} \quad 1 \,\right] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies 7 = (3 \cdot 2) + [{}^1l_{3;2} \cdot (-1)] + (1 \cdot 1) \implies 0 = {}^1l_{3;1}$$

2. krok: $m_{3;2} = 1$ dále upravujeme matici ${}^1\boldsymbol{A}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(1) \\ \rfloor \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ {}^2l_{2;1} & 1 & 0 \\ {}^2l_{3;1} & {}^2l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$${}^1a_{2;1} = 0 = [\ \ldots \implies {}^2l_{2;1} = 0, \quad {}^2l_{3;1} = 0, \quad {}^2l_{3;2} = -1$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{L}} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

Zbývá dopočítat matici *L*:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pokud platí *A = L • U* počítali jsme správně.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

A pokud si uvědomíme, že pro $i > j$ je $l_{i;j} = -m_{i;j}$, můžeme si výpočet zjednodušit!

Příklad 1.2.

LU–rozklad matice:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Příklad 1.2. 1. krok

LU–rozklad matice:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^{1}l_{3;1} & {}^{1}l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^{1}l_{4;1} & {}^{1}l_{4;2} & {}^{1}l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}a_{2;2} & {}^{1}a_{2;3} & {}^{1}a_{2;4} \\ 0 & {}^{1}a_{3;2} & {}^{1}a_{3;3} & {}^{1}a_{3;4} \\ 0 & {}^{1}a_{4;2} & {}^{1}a_{4;3} & {}^{1}a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} =$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1} = -\frac{3}{2},\ m_{3;1} = -\frac{1}{2},\ m_{4;1} = -1$

LU–rozklad matice:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right) \ \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \ \cdot(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^1l_{4;1} & {}^1l_{4;2} & {}^1l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} & {}^1a_{2;4} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} & {}^1a_{3;4} \\ 0 & {}^1a_{4;2} & {}^1a_{4;3} & {}^1a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} =$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1} = -\frac{3}{2},\ \ m_{3;1} = -\frac{1}{2},\ \ m_{4;1} = -1$

LU–rozklad matice:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot\left(-\frac{3}{2}\right) & \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & \cdot(-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^{1}l_{3;1} & {}^{1}l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^{1}l_{4;1} & {}^{1}l_{4;2} & {}^{1}l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}a_{2;2} & {}^{1}a_{2;3} & {}^{1}a_{2;4} \\ 0 & {}^{1}a_{3;2} & {}^{1}a_{3;3} & {}^{1}a_{3;4} \\ 0 & {}^{1}a_{4;2} & {}^{1}a_{4;3} & {}^{1}a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1} = -\frac{3}{2},\ m_{3;1} = -\frac{1}{2},\ m_{4;1} = -1$

LU–rozklad matice:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{3}{2}) & \cdot(-\frac{1}{2}) & \cdot(-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^1l_{4;1} & {}^1l_{4;2} & {}^1l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} & {}^1a_{2;4} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} & {}^1a_{3;4} \\ 0 & {}^1a_{4;2} & {}^1a_{4;3} & {}^1a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1}=-\frac{3}{2},\ m_{3;1}=-\frac{1}{2},\ m_{4;1}=-1$

LU–rozklad matice: 2. krok:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\3&2&0&0\\1&1&3&4\\2&-1&2&3\end{bmatrix}\ \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)\ \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\ \cdot(-1)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ {}^{1}l_{2;1}&1&0&0\\ {}^{1}l_{3;1}&{}^{1}l_{3;2}&1&0\\ {}^{1}l_{4;1}&{}^{1}l_{4;2}&{}^{1}l_{4;3}&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&{}^{1}a_{2;2}&{}^{1}a_{2;3}&{}^{1}a_{2;4}\\0&{}^{1}a_{3;2}&{}^{1}a_{3;3}&{}^{1}a_{3;4}\\0&{}^{1}a_{4;2}&{}^{1}a_{4;3}&{}^{1}a_{4;4}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{3}{2}&1&0&0\\\frac{1}{2}&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{2}&3&4\\0&-2&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{3}{2}&1&0&0\\\frac{1}{2}&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\bullet\left\{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\&1&0&0\\&&1&0\\&&&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&&\\0&0&&\end{bmatrix}\right\}=$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1} = -\frac{3}{2},\ \ m_{3;1} = -\frac{1}{2},\ \ m_{4;1} = -1$

LU–rozklad matice: 2. krok: $m_{3;2} = -1, \quad m_{4;2} = 4$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{3}{2}) & \cdot(-\frac{1}{2}) & \cdot(-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^1l_{4;1} & {}^1l_{4;2} & {}^1l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} & {}^1a_{2;4} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} & {}^1a_{3;4} \\ 0 & {}^1a_{4;2} & {}^1a_{4;3} & {}^1a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1)\cdot(4) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix} \right) \right\} =$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1} = -\frac{3}{2},\ \ m_{3;1} = -\frac{1}{2},\ \ m_{4;1} = -1$

LU–rozklad matice: 2. krok: $m_{3;2} = -1, \quad m_{4;2} = 4$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{3}{2}) & \cdot(-\frac{1}{2}) & \cdot(-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^{1}l_{3;1} & {}^{1}l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^{1}l_{4;1} & {}^{1}l_{4;2} & {}^{1}l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}a_{2;2} & {}^{1}a_{2;3} & {}^{1}a_{2;4} \\ 0 & {}^{1}a_{3;2} & {}^{1}a_{3;3} & {}^{1}a_{3;4} \\ 0 & {}^{1}a_{4;2} & {}^{1}a_{4;3} & {}^{1}a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1)\cdot(4) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \right\} =$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1} = -\frac{3}{2}$, $m_{3;1} = -\frac{1}{2}$, $m_{4;1} = -1$

LU–rozklad matice: 2. krok: $m_{3;2} = -1$, $m_{4;2} = 4$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{3}{2}) & \cdot(-\frac{1}{2}) & \cdot(-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^1l_{4;1} & {}^1l_{4;2} & {}^1l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} & {}^1a_{2;4} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} & {}^1a_{3;4} \\ 0 & {}^1a_{4;2} & {}^1a_{4;3} & {}^1a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) & \cdot(4) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\} =$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1} = -\frac{3}{2}$, $m_{3;1} = -\frac{1}{2}$, $m_{4;1} = -1$

LU–rozklad matice: 2. krok: $m_{3;2} = -1$, $m_{4;2} = 4$ 3. krok:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot\left(-\frac{3}{2}\right) & \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & \cdot(-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^1l_{4;1} & {}^1l_{4;2} & {}^1l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} & {}^1a_{2;4} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} & {}^1a_{3;4} \\ 0 & {}^1a_{4;2} & {}^1a_{4;3} & {}^1a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \cdot (4) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right.}_{\boldsymbol{L}} \bullet \underbrace{\left. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \right\}}_{\boldsymbol{U}} =$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1} = -\frac{3}{2},\ \ m_{3;1} = -\frac{1}{2},\ \ m_{4;1} = -1$

LU–rozklad matice: 2. krok: $m_{3;2} = -1,\quad m_{4;2} = 4$ 3. krok: $m_{4;3} = -\frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)\ \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\ \cdot(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^1l_{4;1} & {}^1l_{4;2} & {}^1l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} & {}^1a_{2;4} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} & {}^1a_{3;4} \\ 0 & {}^1a_{4;2} & {}^1a_{4;3} & {}^1a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot(-1)\cdot(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right.}_{\boldsymbol{L}} \bullet \underbrace{\left. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \right\}}_{\boldsymbol{U}} =$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1} = -\frac{3}{2},\ \ m_{3;1} = -\frac{1}{2},\ \ m_{4;1} = -1$

LU–rozklad matice: 2. krok: $m_{3;2} = -1,\quad m_{4;2} = 4$ 3. krok: $m_{4;3} = -\frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-\frac{3}{2}) & \cdot(-\frac{1}{2}) & \cdot(-1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^1l_{4;1} & {}^1l_{4;2} & {}^1l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} & {}^1a_{2;4} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} & {}^1a_{3;4} \\ 0 & {}^1a_{4;2} & {}^1a_{4;3} & {}^1a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \cdot (4) \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right) \right\} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right. \right.}_{\boldsymbol{L}} \bullet \underbrace{\left. \left. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right) \right\}}_{\boldsymbol{U}} =$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1} = -\frac{3}{2},\;\; m_{3;1} = -\frac{1}{2},\;\; m_{4;1} = -1$

LU–rozklad matice: 2. krok: $m_{3;2} = -1,\;\; m_{4;2} = 4$ 3. krok: $m_{4;3} = -\frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)\;\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\;\cdot(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^{1}l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^{1}l_{3;1} & {}^{1}l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^{1}l_{4;1} & {}^{1}l_{4;2} & {}^{1}l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}a_{2;2} & {}^{1}a_{2;3} & {}^{1}a_{2;4} \\ 0 & {}^{1}a_{3;2} & {}^{1}a_{3;3} & {}^{1}a_{3;4} \\ 0 & {}^{1}a_{4;2} & {}^{1}a_{4;3} & {}^{1}a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot(-1)\cdot(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \right.}_{\boldsymbol{L}} \bullet \left. \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \right\} =$$

Příklad 1.2. 1. krok (násobíme 1. řádek matice $\boldsymbol{A}$): $m_{2;1} = -\frac{3}{2},\ m_{3;1} = -\frac{1}{2},\ m_{4;1} = -1$

LU–rozklad matice: 2. krok: $m_{3;2} = -1,\quad m_{4;2} = 4$ 3. krok: $m_{4;3} = -\frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot\left(-\tfrac{3}{2}\right)\ \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\ \cdot(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1l_{2;1} & 1 & 0 & 0 \\ {}^1l_{3;1} & {}^1l_{3;2} & 1 & 0 \\ {}^1l_{4;1} & {}^1l_{4;2} & {}^1l_{4;3} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1a_{2;2} & {}^1a_{2;3} & {}^1a_{2;4} \\ 0 & {}^1a_{3;2} & {}^1a_{3;3} & {}^1a_{3;4} \\ 0 & {}^1a_{4;2} & {}^1a_{4;3} & {}^1a_{4;4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot(-1)\cdot(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}\right.}_{\boldsymbol{L}} \bullet \underbrace{\left.\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}}_{\boldsymbol{U}} =$$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Opět platí:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$

a pro $i > j$

$l_{i;j} = -m_{i;j}$

2. Algoritmus sestavení LU–rozkladu

1. Postupným přičítáním m–násobků vhodného řádku ke všem řádkům pod ním převedeme matici A na schodovitý tvar ${}^{S}A$.

Nesmíme zaměňovat řádky matice $\boldsymbol{A}$, ***ani přičítat*** násobek nějakého řádku ***k řádku nad ním***.

2. Platí: $U = {}^{S}A$.

Pokud jsme i při omezeních stanovených v 1. kroku našli ***schodovitý tvar*** ${}^{S}\boldsymbol{A}$ matice $\boldsymbol{A}$, našli jsme zároveň matici $\boldsymbol{U}$.

3. Matici L sestavíme z multiplikátorů takto:

$$l_{i;j} = -m_{i;j} \;\; (i > j); \qquad l_{i;j} = 0 \;\; (i < j); \qquad l_{i;i} = 1$$

Do hlavní diagonály dáme ***JEDNIČKY***, **nad** ni dáme ***NULY*** a **pod** ni dáme jednotlivé ***multiplikátory s opačným znaménkem***.

Podrobněji viz například [5, str. 44] nebo [6, str. 64].

4. Ověříme, že platí: $A = L \bullet U$

5. A co když

se nám v důsledku omezení uvedených v 1. bodě nepodaří převést matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar ${}^{S}\boldsymbol{A}$?

To je uvedeno například v [4, str. 52] nebo zde.

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} \qquad \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

1. krok:

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} \; (2) \qquad \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = 2$

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} \mathrm{j}^{(2)} \qquad \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = 2$

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) & \cdot(-3) \\ & \\ & \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = 2, \quad m_{3;1} = -3$

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -20 \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = 2, \quad m_{3;1} = -3$

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = 2$, $m_{3;1} = -3$ 2. krok:

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rfloor^{(2)} & \cdot(-3) \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -20 \end{bmatrix} \rfloor^{(4)} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = 2, \quad m_{3;1} = -3$ 2. krok: $m_{3;2} = 4$

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) \quad \cdot(-3) \\ \rfloor \qquad \\ \qquad \rfloor \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(4) \\ \rfloor \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = 2, \quad m_{3;1} = -3$ 2. krok: $m_{3;2} = 4$

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&4\\-4&-5&-3\\6&5&-8\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdot(2)&\cdot(-3)\\ & \\ & \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}2&3&4\\0&1&5\\0&-4&-20\end{bmatrix}\cdot(4)\sim\underbrace{\begin{bmatrix}2&3&4\\0&1&5\\0&0&0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1}=2,\quad m_{3;1}=-3$ 2. krok: $m_{3;2}=4$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-m_{2;1}&1&0\\-m_{3;1}&-m_{3;2}&1\end{bmatrix}$$

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) & \cdot(-3) \\ & \\ & \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(4) \\ \\ \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = 2, \quad m_{3;1} = -3$ 2. krok: $m_{3;2} = 4$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1. Sestrojte LU–rozklad (singulární) matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) & \cdot(-3) \\ & \\ & \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -20 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(4) \\ \\ \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = 2, \quad m_{3;1} = -3$ 2. krok: $m_{3;2} = 4$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ověření správnosti výpočtu:

$$\boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -5 & -3 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \qquad \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

1. krok:

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2$

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \, \\ \, \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2$

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$ 2. krok

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ & \\ & \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$ 2. krok je zbytečný, protože již máme schodovitý tvar matice $\boldsymbol{A}$.

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2$, $m_{3;1} = -3$ 2. krok je zbytečný, protože již máme schodovitý tvar matice $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2$, $m_{3;1} = -3$ 2. krok je zbytečný, protože již máme schodovitý tvar matice $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{3;2} & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$ 2. krok je zbytečný, protože již máme schodovitý tvar matice $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{3;2} & 1 \end{bmatrix}$$

Prvek $l_{3;2}$ dopočítáme na základě definice: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$ 2. krok je zbytečný, protože již máme schodovitý tvar matice $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{3;2} & 1 \end{bmatrix}$$

Prvek $l_{3;2}$ dopočítáme na základě definice: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

A stejně jako v prvních dvou příkladech: $a_{3;2} = 6 = \begin{bmatrix} 3 & l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ & \\ & \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -2$, $m_{3;1} = -3$ 2. krok je zbytečný, protože již máme schodovitý tvar matice $\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{3;2} & 1 \end{bmatrix}$$

Prvek $l_{3;2}$ dopočítáme na základě definice: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

A stejně jako v prvních dvou příkladech: $a_{3;2} = 6 = \begin{bmatrix} 3 & l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad 6 = (3 \cdot 2) + (l_{3;2} \cdot 4) + (1 \cdot 0) \quad \Longrightarrow \quad 0 = l_{3;2}$$

2.2. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody převedeme matici $\boldsymbol{A}$ na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-3) \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \cdot(0)$$

1. krok: $m_{2;1} = -2, \quad m_{3;1} = -3$ 2. krok je zbytečný, protože již máme schodovitý tvar matice $\boldsymbol{A}$.

$m_{3;2} = 0$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{3;2} & 1 \end{bmatrix}$$

Prvek $l_{3;2}$ dopočítáme na základě definice: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

A stejně jako v prvních dvou příkladech: $a_{3;2} = 6 = \begin{bmatrix} 3 & l_{3;2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow \; 6 = (3 \cdot 2) + (l_{3;2} \cdot 4) + (1 \cdot 0) \;\Longrightarrow\; 0 = l_{3;2} \;\Longrightarrow\; m_{3;2} = 0$

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \qquad \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} j^{(2)} \qquad \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} j^{(2)} \qquad \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) & \cdot(-3) \\ & \\ & \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdot(2) \quad \cdot(-3) \\ \rfloor \\ \qquad \rfloor \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rfloor^{\cdot(2)} & \cdot(-3) \\ & \rfloor \\ & \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \rangle \text{ zaměnit řádky}$$

Vidíme, že bez **vzájemné záměny 2. a 3. řádku** v matici ${}^{1}\boldsymbol{A}$, schodovitého tvaru nedosáhneme!

Tyto operace se ale při LU–rozkladu nesmí použít.

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \rangle \text{ zaměnit řádky}$$

Vidíme, že bez **vzájemné záměny 2. a 3. řádku** v matici ${}^{1}\boldsymbol{A}$, nebo bez přičtení 3. řádku ke 2. řádku, schodovitého tvaru nedosáhneme!

Tyto operace se ale při LU–rozkladu nesmí použít.

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) \;\; \cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \rangle \text{ zaměnit řádky}$$

Vidíme, že bez **vzájemné záměny 2. a 3. řádku** v matici $^{1}\boldsymbol{A}$, nebo bez přičtení 3. řádku ke 2. řádku, nebo bez záměny 2. a 3. sloupce, schodovitého tvaru nedosáhneme!
Tyto operace se ale při LU–rozkladu nesmí použít.

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \rceil\cdot(2) & \cdot(-3) \\ & \rfloor \\ & \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \rangle\ \text{zaměnit řádky}$$

Vidíme, že bez **vzájemné záměny 2. a 3. řádku** v matici ${}^{1}\boldsymbol{A}$, nebo bez přičtení 3. řádku ke 2. řádku, nebo bez záměny 2. a 3. sloupce, schodovitého tvaru nedosáhneme!
Tyto operace se ale při LU–rozkladu nesmí použít.

V takovém případě hledáme tři matice, pro které platí: $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$

kde součin $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A}$ má v našem případě stejný výsledek, jako záměna 2. a 3. řádku v původní matici $\boldsymbol{A}$.

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) & \cdot(-3) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \rangle \text{ zaměnit řádky}$$

Vidíme, že bez **vzájemné záměny 2. a 3. řádku** v matici ${}^{1}\boldsymbol{A}$, nebo bez přičtení 3. řádku ke 2. řádku, nebo bez záměny 2. a 3. sloupce, schodovitého tvaru nedosáhneme!
Tyto operace se ale při LU–rozkladu nesmí použít.

V takovém případě hledáme tři matice, pro které platí: $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$

kde součin $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A}$ má v našem případě stejný výsledek, jako záměna 2. a 3. řádku v původní matici $\boldsymbol{A}$.
Tedy

$$\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \rangle \text{ zaměnit řádky}$$

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(2) & \cdot(-3) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \rangle \text{ zaměnit řádky}$$

Vidíme, že bez **vzájemné záměny 2. a 3. řádku** v matici ${}^{1}\boldsymbol{A}$, nebo bez přičtení 3. řádku ke 2. řádku, nebo bez záměny 2. a 3. sloupce, schodovitého tvaru nedosáhneme!
Tyto operace se ale při LU–rozkladu nesmí použít.

V takovém případě hledáme tři matice, pro které platí: $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$

kde součin $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A}$ má v našem případě stejný výsledek, jako záměna 2. a 3. řádku v původní matici $\boldsymbol{A}$.
Tedy

$$\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \rangle \text{ zaměnit řádky}$$

Matici $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (nazývanou **permutační matice**) dostaneme z jednotkové matice $\boldsymbol{E}$,

na kterou aplikujeme stejnou úpravu, jako na matici $\boldsymbol{A}$. Tedy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rangle$ zaměnit řádky

2.3. Sestrojte LU–rozklad matice

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&4\\-4&-6&-3\\6&6&6\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdot(2)&\cdot(-3)\\ & \\ & \end{matrix}\sim\begin{bmatrix}2&3&4\\0&0&5\\0&-3&-6\end{bmatrix}\rangle\text{ zaměnit řádky}$$

Vidíme, že bez **vzájemné záměny 2. a 3. řádku** v matici ${}^{1}\boldsymbol{A}$, nebo bez přičtení 3. řádku ke 2. řádku, nebo bez záměny 2. a 3. sloupce, schodovitého tvaru nedosáhneme!
Tyto operace se ale při LU–rozkladu nesmí použít.

V takovém případě hledáme tři matice, pro které platí: $\boldsymbol{P}\bullet\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\bullet\boldsymbol{U}$

kde součin $\boldsymbol{P}\bullet\boldsymbol{A}$ má v našem případě stejný výsledek, jako záměna 2. a 3. řádku v původní matici $\boldsymbol{A}$.
Tedy

$$\boldsymbol{P}\bullet\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2&3&4\\-4&-6&-3\\6&6&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4\\6&6&6\\-4&-6&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4\\-4&-6&-3\\6&6&6\end{bmatrix}\rangle\text{ zaměnit řádky}$$

Matici $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ (nazývanou **permutační matice**) dostaneme z jednotkové matice $\boldsymbol{E}$,
na kterou aplikujeme stejnou úpravu, jako na matici $\boldsymbol{A}$. Tedy: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\rangle$ zaměnit řádky

Zbývá najít LU–rozklad matice $\boldsymbol{P}\bullet\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

1. krok:

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \rfloor^{\cdot(-3)} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = -3$

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \rfloor^{\cdot(-3)} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = -3$

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{P}\bullet\boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{P}\bullet\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}2&3&4\\-4&-6&-3\\6&6&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3&4\\6&6&6\\-4&-6&-3\end{bmatrix}\begin{matrix}\cdot(-3)&\cdot(2)\\ \rfloor & \\ & \rfloor\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-3&-6\\0&&\end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1}=-3,\quad m_{3;1}=2$

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) & \cdot(2) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

1. krok: $m_{2;1} = -3$, $m_{3;1} = 2$ 2. krok $m_{3;2} = 0$

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) & \cdot(2) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -3$, $m_{3;1} = 2$ 2. krok $m_{3;2} = 0$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) & \cdot(2) \\ \rfloor & \\ & \rfloor \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -3, \quad m_{3;1} = 2$ 2. krok $m_{3;2} = 0$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbývá ověřit: $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \quad \cdot(2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -3$, $m_{3;1} = 2$ 2. krok $m_{3;2} = 0$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbývá ověřit: $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Přímým chodem Gaussovy eliminační metody zkusíme matici $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A}$ převést na schodovitý tvar.

$$\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) & \cdot(2) \\ & \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}}$$

1. krok: $m_{2;1} = -3$, $m_{3;1} = 2$ 2. krok $m_{3;2} = 0$

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{2;1} & 1 & 0 \\ -m_{3;1} & -m_{3;2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zbývá ověřit: $\boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -4 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

Použitá literatura

[1] Baštinec, J., Novák, M. *Moderní numerické metody.* Brno : Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, 281 s. [On line] ⟨http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/materialy/skripta/mmnm.pdf⟩

[2] Dalík, J. *Matematika IV, Numerická analýza.* Brno : Fakulta stavební VUT, 2009, 130 s. [Dostupné z adresy:] ⟨https://intranet.fce.vutbr.cz/pedagog/predmety/opory.asp⟩

[3] Diblík, J., Baštinec, J. *Matematika IV.* [skriptum] Brno : VUT, Fakulta elektrotechnická, 1991, 120 s. [Dostupné z adresy:] ⟨http://rschwarz.wz.cz/fast/DB_skripta.pdf⟩

[4] Dostál, Z., Vondrák, V. *Lineární algebra.* Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni, 2012, 249 s. [On line] ⟨http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra.pdf⟩

[5] Kučera, R., Morávková, Z. *Numerická matematika* Ostrava : Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2015, 118 s. [On line] ⟨mdg.vsb.cz/portal/nm/nm.pdf⟩

[6] Míka, S. *Numerické metody algebry.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, Matematika pro vysoké školy technické, sešit IV, Praha, 1982, 176 s.