Josef Čížek

Jacobiova a Gauss – Seidlova iterační metoda

Teoretický úvod

$$A = L + D + U$$

Matice L obsahuje prvky matice A pod hlavní diagonálou a všude jinde nuly. Nazýváme ji **dolní trojúhelníková matice.**

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 \end{pmatrix}$$

Matice D obsahuje prvky hlavní diagonály matice A. Nazýváme ji **diagonální matice.**

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matice U obsahuje prvky matice A nad hlavní diagonálou a všude jinde nuly. Nazýváme ji **horní trojúhelníková matice**.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nm} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiova iterační metoda

M=D, N=-L-U, T=D^{-1}(-L-U)

$$\begin{array}{lllllll} x_1^{(i+1)} & = (& & -a_{12}x_2^{(i)} & \cdots & -a_{1n}x_n^{(i)} & +b_1)/a_{11} \\ x_2^{(i+1)} & = (& -a_{21}x_1^{(i)} & & \cdots & -a_{2n}x_n^{(i)} & +b_2)/a_{22} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ x_n^{(i+1)} & = (& -a_{n1}x_1^{(i)} & & \cdots & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{(i)} & +b_n)/a_{nn} \end{array}$$

$$\text{Jacobiova iterační matice } T = \begin{pmatrix} 0 & {}^{-a_{12}}/_{a_{11}} & \cdots & {}^{-a_{1n}}/_{a_{11}} \\ {}^{-a_{21}}/_{a_{22}} & 0 & \cdots & {}^{-a_{2n}}/_{a_{22}} \\ \vdots & & & \vdots \\ {}^{-a_{n1}}/_{a_{nn}} & \cdots & {}^{-a_{n,n-1}}/_{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

Vektor $d = [b_1/a_{11}, b_2/a_{22}, \cdots b_n/a_{nn}]^T$

Gauss – Seidlova iterační metoda

M=L+D a N=U

$$\begin{array}{lllllll}
x_1^{(i+1)} & = (& & -a_{12}x_2^{(i)} & \cdots & -a_{1n}x_n^{(i)} & +b_1)/a_{11} \\
x_2^{(i+1)} & = (& -a_{21}x_1^{(i+1)} & & \cdots & -a_{2n}x_n^{(i)} & +b_2)/a_{22} \\
 & \vdots & & & & & \vdots \\
x_n^{(i+1)} & = (& -a_{n1}x_1^{(i+1)} & & \cdots & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{(i+1)} & +b_n)/a_{nn}
\end{array}$$

Ověření, zda je matice ryze diagonálně dominantní:

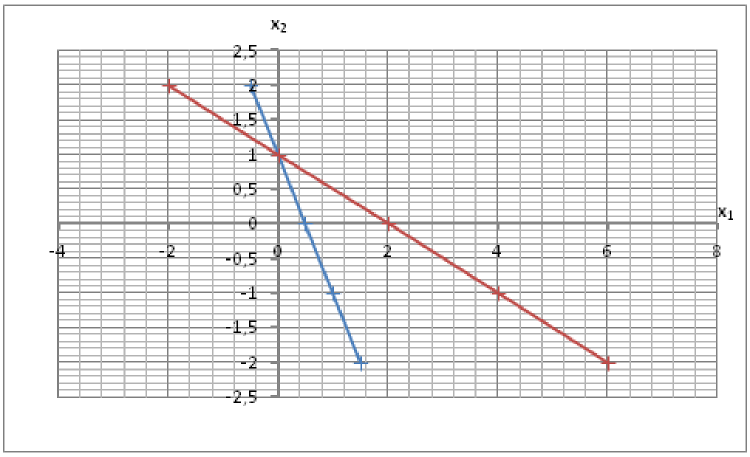
$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i\neq j \\ j=1}} |a_{ij}|$ pro $i = 1, \cdots, n$

Příklad 1

Mějme soustavu rovnic:

$$2x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 = 2$$



Zjistěte pomocí Jacobiovy i Gauss – Seidlovi iterační metody, zda řešení konverguje, či diverguje. Pro každou iteraci vypočítejte euklidovskou normu $\left\|x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)}\right\|_2 = \sqrt{\left(x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\right)^2 + \left(x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)}\right)^2}$. Iterujte, dokud nebude splněna podmínka $\left\|x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)}\right\|_2 < \varepsilon$, kde $\varepsilon = 0{,}0002$.

1) Zvolíme počáteční aproximaci.

$$x_1^{(0)} = 0$$

$$x_2^{(0)} = 0$$

2) Ověříme, zda je matice ryze diagonálně dominantní.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i\neq j \\ j=1}} |a_{ij}| \text{ pro } i = 1, \cdots, n$$

$$|a_{11}| > |a_{12}| \qquad\qquad |a_{22}| > |a_{21}|$$

$$2 > 1 \qquad\qquad 2 > 1$$

Matice je ryze diagonálně dominantní.

3) Jacobiova iterační metoda:

$$\begin{cases} x_1^{(i+1)} &= (1 - x_2^{(i)})/2 \\ x_2^{(i+1)} &= (2 - x_1^{(i)})/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} &= (1-0)/2 &= 0{,}5 \\ x_2^{(1)} &= (2-0)/2 &= 1 \end{cases}$$

$$\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2 = \sqrt{\left(x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\right)^2 + \left(x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right)^2 + \left(x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right)^2} = \sqrt{(0{,}5-0)^2 + (1-0)^2} = 1{,}1180$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} &= (1-1)/2 &= 0 \\ x_2^{(2)} &= (2-0{,}5)/2 &= 0{,}75 \end{cases}$$

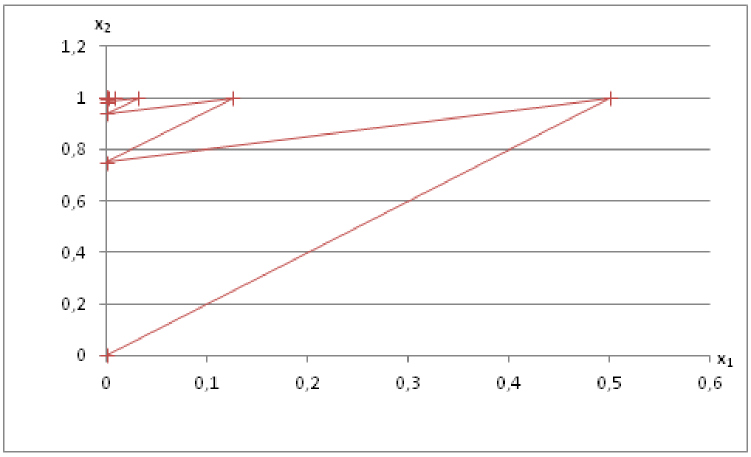
$$\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2 = \sqrt{\left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right)^2 + \left(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right)^2} = \sqrt{(0-0{,}5)^2 + (0{,}75-1)^2} = 0{,}5590$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} &= (1-0{,}75)/2 &= 0{,}125 \\ x_2^{(3)} &= (2-0)/2 &= 1 \end{cases}$$

$$\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2 = \sqrt{\left(x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right)^2 + \left(x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right)^2} = \sqrt{(0{,}125-0)^2 + (1-0{,}75)^2} = 0{,}2795$$

Jacobiova iterační metoda			Norma
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$\left\Vert x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\Vert_2$
0	0	0	-
1	0,5	1	1,1180
2	0	0,75	0,5590
3	0,125	1	0,2795
4	0	0,9375	0,1397
	⋮		
13	0,000122	1	0,0002
14	0	0,999939	0,0001

Po čtrnácti krocích jsme splnili podmínku $\left\Vert x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\Vert_2 < \varepsilon$, kde $\left\Vert x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\Vert_2 = 0{,}0001$, $\varepsilon = 0{,}0002$. Z hodnot iterací vyplývá, že výsledek konverguje k řešení (viz následující graf).



4) Gauss – Seidlova iterační metoda:

$$\begin{cases} x_1^{(i+1)} & = & (1 - x_2^{(i)})/2 \\ x_2^{(i+1)} & = & (2 - x_1^{(i+1)})/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = & (1-0)/2 & = & 0{,}5 \\ x_2^{(1)} & = & (2-0{,}5)/2 & = & 0{,}75 \end{cases}$$

$$\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2 = \sqrt{\left(x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\right)^2 + \left(x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right)^2 + \left(x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right)^2} = \sqrt{(0{,}5-0)^2 + (0{,}75-0)^2} = 0{,}9013$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} & = & (1-0{,}75)/2 & = & 0{,}125 \\ x_2^{(2)} & = & (2-0{,}125)/2 & = & 0{,}9375 \end{cases}$$

$$\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2 = \sqrt{\left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right)^2 + \left(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(0{,}125-0{,}5)^2 + (0{,}9375-0{,}75)^2} = 0{,}4192$$

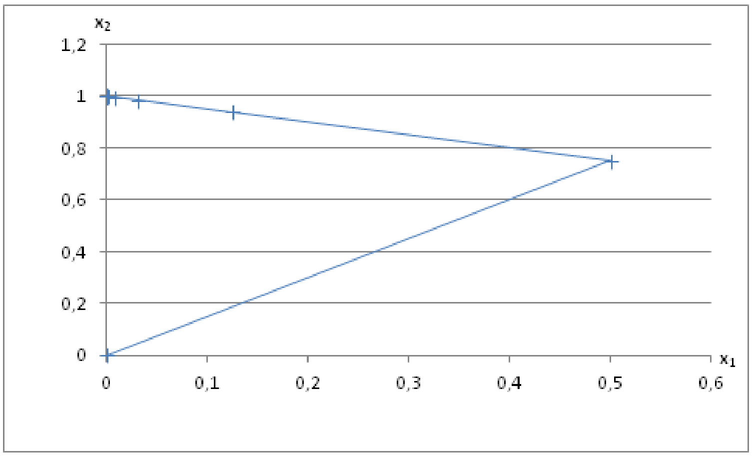
$$\begin{cases} x_1^{(3)} & = & (1-0{,}9375)/2 & = & 0{,}03125 \\ x_2^{(3)} & = & (2-0{,}03125)/2 & = & 0{,}984375 \end{cases}$$

$$\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2 = \sqrt{\left(x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right)^2 + \left(x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(0{,}03125-0{,}125)^2 + (0{,}984375-0{,}9375)^2} = 0{,}2795$$

Gauss - Seidlova iterační metoda			Norma
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$\left\Vert x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\Vert_2$
0	0	0	-
1	0,5	0,75	0,9013
2	0,125	0,9375	0,4192
3	0,03125	0,984375	0,1048
	⋮		
7	0,000122	0,999939	0,0004
8	3,05E-05	0,999985	0,0001

Již po osmi krocích jsme splnili podmínku $\left\Vert x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\Vert_2 < \varepsilon$, kde $\left\Vert x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\Vert_2 = 0{,}0001, \varepsilon = 0{,}0002$. Z hodnot iterací vyplývá, že výsledek konverguje k řešení (viz následující graf).



Z postupu výpočtu a vykreslování grafu je patrné, že výpočet pomocí Gauss – Seidlovy iterační metody, je rychlejší, než pomocí Jacobiovy iterační metody.

Soustavu lineárních rovnic lze vyřešit i pomocí následujících operací matic.

Rovnice přepíšeme do tvaru:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobiova iterační metoda:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = [0{,}5; 1]^T$$

$$x^{(1)} = Tx^{(1)} + d = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0 \end{pmatrix} x^{(1)} + \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} => x_1 = 0, x_2 = 0{,}5$$

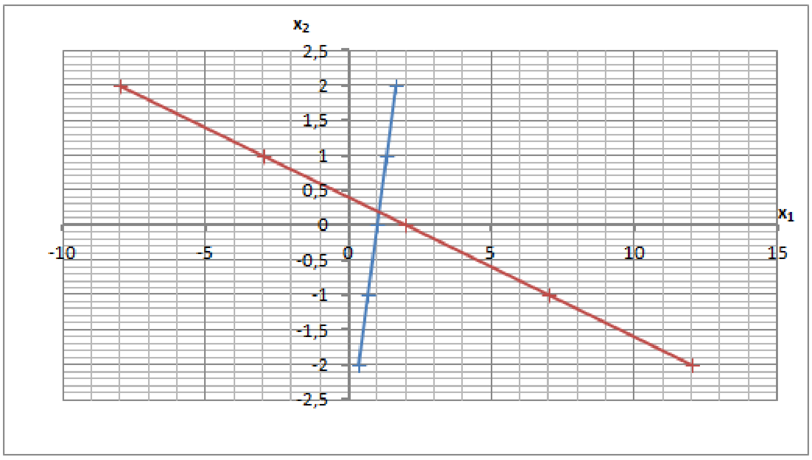
Tento způsob je však velmi zdlouhavý a náročný na výpočet. Pro výpočet iterace je tedy vhodné, použít tabulkový nástroj (např. Excell), do kterého zadáme příslušné rovnice a hodnotu jednotlivých iterací tak dostaneme mnohem rychleji.

Příklad 2

Mějme soustavu rovnic:

$$3x_1 - x_2 = 3$$

$$x_1 + 5x_2 = 2$$



Zjistěte pomocí Jacobiovy i Gauss – Seidlovi iterační metody, zda řešení konverguje, či diverguje. Pro každou iteraci vypočítejte euklidovskou normu $\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2$. Iterujte, dokud nebude splněna podmínka $\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2 < \varepsilon$, kde $\varepsilon = 0{,}001$.

1) Zvolíme počáteční aproximaci.

$$x_1^{(0)} = 0$$

$$x_2^{(0)} = 0$$

2) Ověříme, zda je matice ryze diagonálně dominantní.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}} |a_{ij}| \text{ pro } i = 1, \cdots, n$$

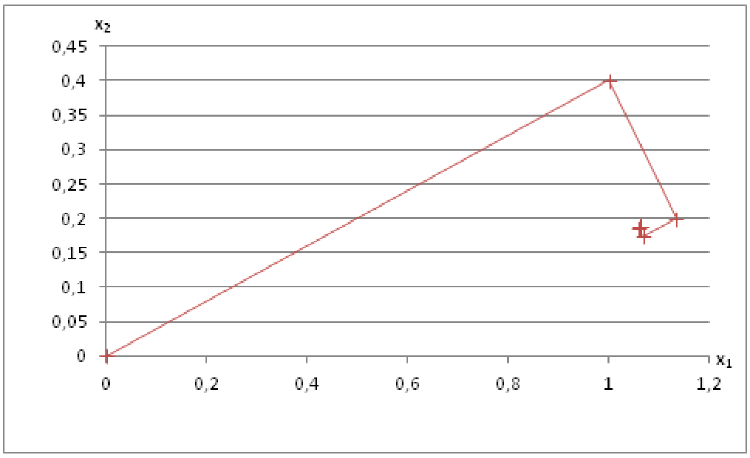
$$|a_{11}| > |a_{12}| \qquad\qquad |a_{22}| > |a_{21}|$$

$$3 > 1 \qquad\qquad 5 > 1$$

Matice je ryze diagonálně dominantní.

3) Jacobiova iterační metoda:

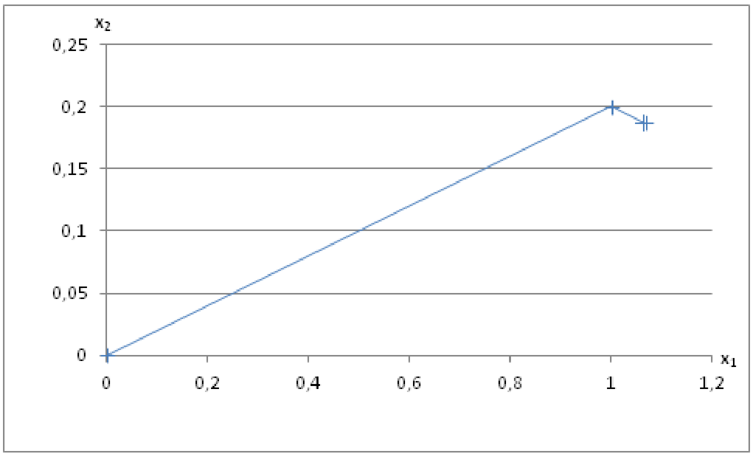
Jacobiova iterační metoda			Norma
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2$
0	0	0	-
1	1	0,4	1,0770
2	1,133333	0,2	0,2403
3	1,066667	0,173333	0,0718
4	1,057778	0,186667	0,0160
⋮			
9	1,062499	0,187504	0,0010
10	1,062501	0,1875	0,0003



Řešení konverguje.

4) Gauss – Seidlova iterační metoda

Gauss - Seidlova iterační metoda			Norma
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$\left\Vert x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\Vert_2$
0	0	0	-
1	1	0,2	1,0198
2	1,066667	0,186667	0,0679
3	1,062222	0,187556	0,0045
4	1,062519	0,187496	0,0003



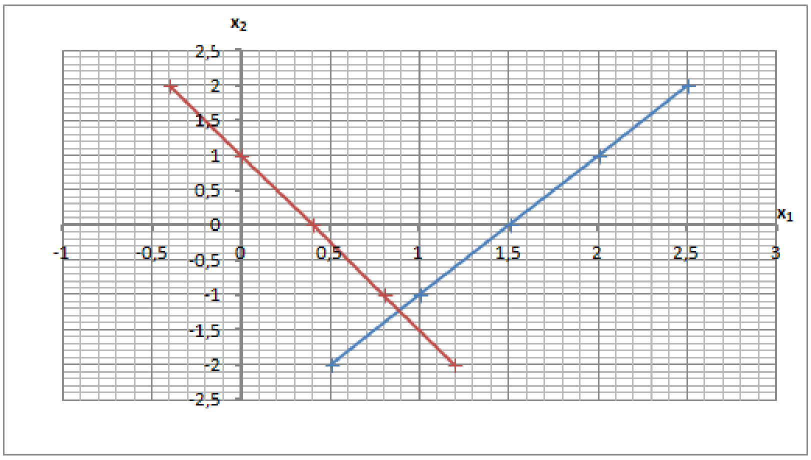
Řešení konverguje.

Příklad 3

Mějme soustavu rovnic:

$$-4x_1 + 2x_2 = -6$$

$$5x_1 + 2x_2 = 2$$



Zjistěte pomocí Jacobiovy i Gauss – Seidlovi iterační metody, zda řešení konverguje, či diverguje. Pro každou iteraci vypočítejte euklidovskou normu $\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2$. Iterujte, dokud nebude splněna podmínka $\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2 < \varepsilon$, kde $\varepsilon = 0{,}0005$.

1) Zvolíme počáteční aproximaci.

$$x_1^{(0)} = 0$$

$$x_2^{(0)} = 0$$

2) Ověříme, zda je matice ryze diagonálně dominantní.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}} |a_{ij}| \text{ pro } i = 1, \cdots, n$$

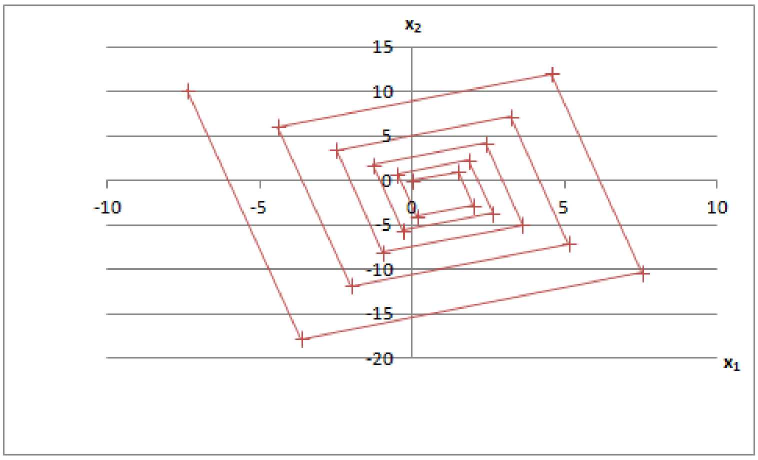
$$|a_{11}| > |a_{12}| \qquad\qquad |a_{22}| > |a_{21}|$$

$$4 > 2 \qquad\qquad 2 < 5$$

Matice není diagonálně dominantní.

3) Jacobiova iterační metoda:

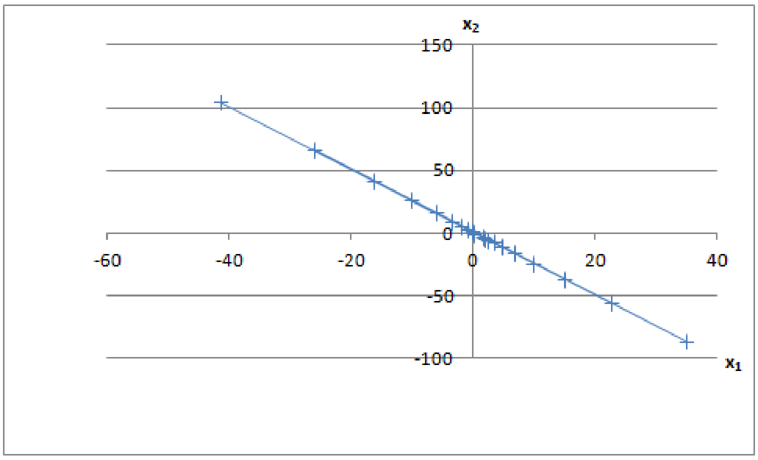
Jacobiova iterační metoda			Norma
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2$
0	0	0	-
1	1,5	1	1,8027
2	2	-2,75	3,7831
3	0,125	-4	2,2534
4	-0,5	0,6875	4,7289
5	1,84375	2,25	2,8168
6	2,625	-3,60938	5,9112
7	-0,30469	-5,5625	3,5210
8	-1,28125	1,761719	7,3890
9	2,380859	4,203125	4,4013
10	3,601563	-4,95215	9,2362



Řešení diverguje.

4) Gauss – Seidlova iterační metoda:

Gauss - Seidlova iterační metoda			Norma
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$\left\lVert x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\rVert_2$
0	0	0	-
1	1,5	-2,75	3,1324
2	0,125	0,6875	3,7023
3	1,84375	-3,60938	4,6278
4	-0,30469	1,761719	5,7848
5	2,380859	-4,95215	7,2310
6	-0,97607	3,440186	9,0388
7	3,220093	-7,05023	11,2985
8	-2,02512	6,06279	14,1231
9	4,531395	-10,3285	17,6539
10	-3,66424	10,16061	22,0674



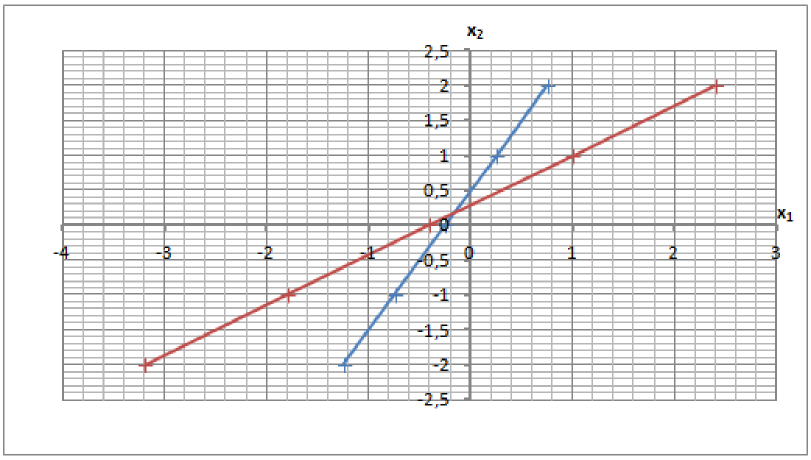
Řešení diverguje.

Příklad 4

Mějme soustavu rovnic:

$$-4x_1 + 2x_2 = 1$$

$$5x_1 - 7x_2 = -2$$



Zjistěte pomocí Jacobiovy i Gauss – Seidlovi iterační metody, zda řešení konverguje, či diverguje. Pro každou iteraci vypočítejte euklidovskou normu $\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2$. Iterujte, dokud nebude splněna podmínka $\left\| x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\|_2 < \varepsilon$, kde $\varepsilon = 0{,}006$.

1) Zvolíme počáteční aproximaci.

$$x_1^{(0)} = 0$$

$$x_2^{(0)} = 0$$

2) Ověříme, zda je matice ryze diagonálně dominantní.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}} |a_{ij}| \text{ pro } i = 1, \cdots, n$$

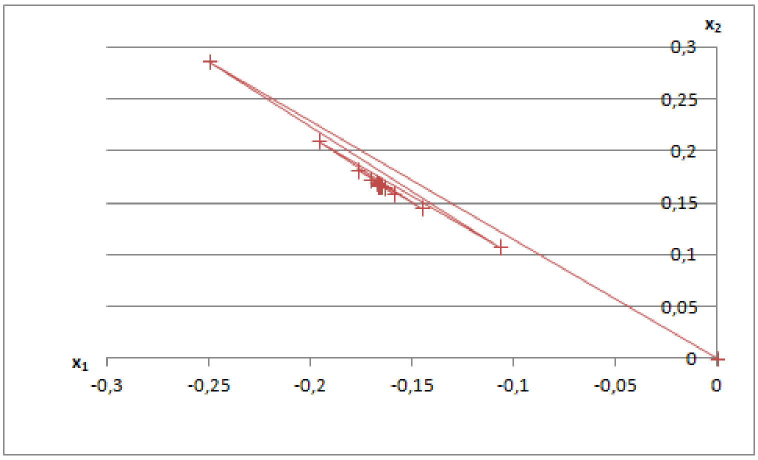
$$|a_{11}| > |a_{12}| \qquad\qquad |a_{22}| > |a_{21}|$$

$$4 > 2 \qquad\qquad 7 > 5$$

Matice je ryze diagonálně dominantní.

3) Jacobiova iterační metoda:

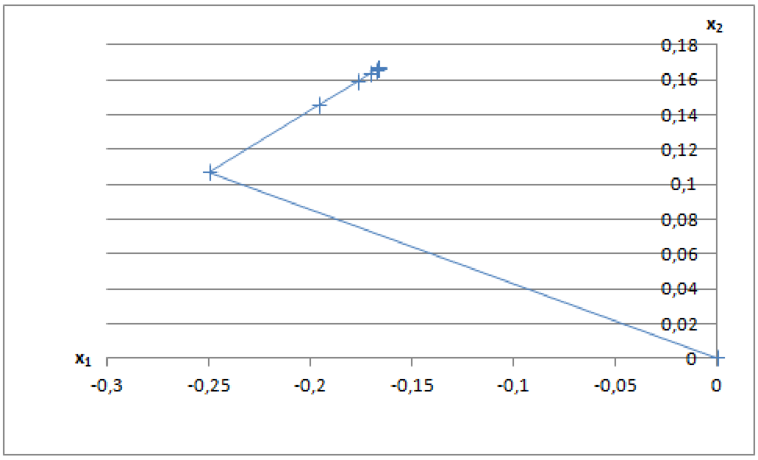
Jacobiova iterační metoda			Norma
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$\left\lVert x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\rVert_2$
0	0	0	-
1	-0,25	0,285714	0,3796
2	-0,10714	0,107143	0,2286
3	-0,19643	0,209184	0,1355
4	-0,14541	0,145408	0,0816
5	-0,1773	0,181851	0,0484
6	-0,15907	0,159074	0,0291
7	-0,17046	0,17209	0,0172
8	-0,16396	0,163955	0,0104
9	-0,16802	0,168603	0,0061
10	-0,1657	0,165698	0,0037



Řešení konverguje.

4) Gauss – Seidlova iterační metoda:

Gauss - Seidlova iterační metoda			Norma
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$\left\Vert x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\Vert_2$
0	0	0	-
1	-0,25	0,107143	0,2719
2	-0,19643	0,145408	0,0658
3	-0,1773	0,159074	0,0235
4	-0,17046	0,163955	0,0083
5	-0,16802	0,165698	0,0029



Řešení konverguje.

Příklad 5

Mějme soustavu rovnic:

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = -2$$

$$-2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3$$

Zjistěte pomocí Jacobiovy i Gauss – Seidlovi iterační metody, zda řešení konverguje, či diverguje. Pro každou iteraci vypočítejte euklidovskou normu $\left\|x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)}\right\|_2$. Iterujte, dokud nebude splněna podmínka $\left\|x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)}\right\|_2 < \varepsilon$, kde $\varepsilon = 0{,}01$.

1) Zvolíme počáteční aproximaci.

$$x_1^{(0)} = 0$$

$$x_2^{(0)} = 0$$

$$x_3^{(0)} = 0$$

2) Ověříme, zda je matice ryze diagonálně dominantní.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}} |a_{ij}| \text{ pro } i = 1, \cdots, n$$

$|a_{11}| > |a_{12} + a_{13}|$ $|a_{22}| > |a_{21} + a_{23}|$ $|a_{33}| > |a_{31} + a_{32}|$

$3 \ngtr 3$ $4 > 3$ $5 > 3$

Matice je pouze diagonálně dominantní.

3) Jacobiova iterační metoda:

Jacobiova iterační metoda				Norma
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\left\|x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)}\right\|_2$
0	0	0	0	-
1	-0,66667	0,5	0,6	1,0268
2	-0,1	0,016667	0,533333	0,7477
3	-0,30556	0,316667	0,613333	0,3723
4	-0,15222	0,193889	0,534444	0,2116
5	-0,24574	0,290278	0,552889	0,1355
⋮				
9	-0,22407	0,257605	0,543772	0,0138
10	-0,21828	0,252022	0,541772	0,0082

Řešení konverguje.

4) Gauss – Seidlova iterační metoda:

Gauss - Seidlova iterační metoda				Norma
i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\left\lVert x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \right\rVert_2$
0	0	0	0	-
1	-0,66667	0,166667	0,666667	0,9574
2	-0,44444	0,111111	0,644444	0,2301
3	-0,38519	0,146296	0,618519	0,0736
4	-0,38272	0,154012	0,614938	0,0088

Řešení konverguje.

Seznam použité literatury

[1] Dalík, J.: Numerické metody, Akademické nakladatelství CERM s.r.o. Brno, Brno 1997

Za spolupráce a pod vedením Mgr. Ireny Hinterleitner, Ph.D., které tímto děkuji.

V Brně 2016