ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

- Matice $A = (a_{ij})$ je ***ryze řádkově diagonálně dominantní***, jestliže v každém řádku je absolutní hodnota prvku ležícího na hlavní diagonále větší, než součet absotutních hodnot všech ostatních prvků, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

- Symetrická matice $A = (a_{ij})$ je ***pozitivně definitní***, pokud všechny hlavní subdeterminanty jsou kladné, tj.

$$|a_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad |A| > 0.$$

- ***Eukleidovská norma***:

$$||X^{(i+1)} - X^{(i)}||_2 = \sqrt{\left(x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}\right)^2 + \left(x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}\right)^2 + \cdots + \left(x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)}\right)^2}$$

– Hledáme řešení soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

1. krok řešení: z i-té rovnice vyjádříme neznámou x_i:

$$\boldsymbol{x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=1, k\neq i}^{n} a_{ik}x_k\right)} \qquad \text{pro} \;\; i = 1, \ldots, n$$

Pro $n = 3$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)$$

JACOBIHO METODA

- **Algoritmus:** používá se jen předchozí iterace $X^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})^T$

$$\boldsymbol{x_j^{(i+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{k=1,k\neq j}^{n} a_{jk}x_k^{(i)}\right)} \qquad \text{pro} \;\; j = 1, \ldots, n$$

Pro $n = 3$:

$$x_1^{(i+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(i)} - a_{13}x_3^{(i)}\right)$$
$$x_2^{(i+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(i)} - a_{23}x_3^{(i)}\right)$$
$$x_3^{(i+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(i)} - a_{32}x_2^{(i)}\right)$$

- **Podmínka kovnergence:** matice A musí být ryze řádkově diagonálně dominantní
- **Počáteční aproximace:** obvykle nulový vektor
- **Podmínka ukončení:** $||X^{(i+1)} - X^{(i)}||_2 < \varepsilon$

GAUSS-SEIDELOVA METODA

- **Algoritmus:** používá se předchozí iterace $X^{(i)}$ a již spočítané prvky nové iterace $X^{(i+1)}$

$$\boldsymbol{x_j^{(i+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}x_k^{(i+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k^{(i)}\right)} \qquad \text{pro} \;\; j = 1, \ldots, n$$

Pro $n = 3$:

$$x_1^{(i+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(i)} - a_{13}x_3^{(i)}\right)$$
$$x_2^{(i+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(i+1)} - a_{23}x_3^{(i)}\right)$$
$$x_3^{(i+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(i+1)} - a_{32}x_2^{(i+1)}\right)$$

- **Podmínka kovnergence:** matice A musí být ryze řádkově diagonálně dominantní nebo pozitivně definitní
- **Počáteční aproximace:** obvykle nulový vektor
- **Podmínka ukončení:** $||X^{(i+1)} - X^{(i)}||_2 < \varepsilon$

Příklad: Danou soustavu lineárních rovnic řešte Jacobiho i Gauss-Seidelovou metodou s chybou menší než $\varepsilon = 0,05$. Počáteční aproximaci zvolte $(0,0,0)$. (Zaokrouhlujte na 4 desetinná místa.)

$$\begin{aligned} 10x_1 + \ 4x_2 - \ 5x_3 &= \ 1,5 & \Rightarrow \quad x_1 &= \tfrac{1}{10}(1,5 - 4x_2 + 5x_3) \\ x_1 + 12x_2 - 10x_3 &= -2,5 & \Rightarrow \quad x_2 &= \tfrac{1}{12}(-2,5 - x_1 + 10x_3) \\ x_1 + \ 5x_2 - \ 8x_3 &= -6,5 & \Rightarrow \quad x_3 &= \tfrac{1}{8}(6,5 + x_1 + 5x_2) \end{aligned}$$

- **Ověření konvergence:**

$$\left.\begin{aligned} |10| &> |4| + |-5| \ \checkmark \\ |12| &> |1| + |-10| \ \checkmark \\ |-8| &> |1| + |5| \ \checkmark \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ A JE RYZE ŘÁDKOVĚ DIAGONÁLNĚ DOMINANTNÍ $\Rightarrow$ OBĚ METODY KONVERGUJÍ K PŘESNÉMU ŘEŠENÍ

- **Jacobiho metoda:**

$$x_1^{(i+1)} = \frac{1}{10}\left(1,5 - 4x_2^{(i)} + 5x_3^{(i)}\right)$$
$$x_2^{(i+1)} = \frac{1}{12}\left(-2,5 - x_1^{(i)} + 10x_3^{(i)}\right)$$
$$x_3^{(i+1)} = \frac{1}{8}\left(6,5 + x_1^{(i)} + 5x_3^{(i)}\right)$$

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\|\|X^{(i)} - X^{(i-1)}\|\|_2$
0	0	0	0	/
1	0,15	-0,2083	0,8125	0,8521
2	0,6396	0,4563	0,7011	0,833
3	0,318	0,3226	1,1776	0,5902
4	0,6098	0,7465	1,0539	0,5293
5	0,3783	0,6191	1,3553	0,4008
6	0,58	0,8895	1,2467	0,3544
7	0,4175	0,7823	1,441	0,275
8	0,5576	0,9577	1,3536	0,2409
9	0,4437	0,8732	1,4807	0,1904
10	0,5411	0,9886	1,4137	0,1652
11	0,4614	0,9247	1,498	0,1325
12	0,5291	1,0016	1,4481	0,114
13	0,4734	0,9543	1,5046	0,0924
14	0,5206	1,0061	1,4681	0,079
15	0,4816	0,9717	1,5064	0,0645
16	0,5145	1,0068	1,48	0,05484
17	0,4873	0,9822	1,5061	$0,04505 < \varepsilon$

$$K = \{(0,4873; 0,9822; 1,5061)^T\}$$

- **Gauss-Seidelova metoda:**

$$x_1^{(i+1)} = \frac{1}{10}\left(1{,}5 - 4x_2^{(i)} + 5x_3^{(i)}\right)$$
$$x_2^{(i+1)} = \frac{1}{12}\left(-2{,}5 - x_1^{(i+1)} + 10x_3^{(i)}\right)$$
$$x_3^{(i+1)} = \frac{1}{8}\left(6{,}5 + x_1^{(i+1)} + 5x_2^{(i+1)}\right)$$

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$x_3^{(i)}$	$\lvert\lvert X^{(i)} - X^{(i-1)}\rvert\rvert_2$
0	0	0	0	/
1	0,15	-0,2208	0,6933	0,7429
2	0,585	0,3207	1,0861	0,798
3	0,5648	0,6497	1,2892	0,3872
4	0,5347	0,8214	1,3927	0,2028
5	0,5178	0,9091	1,4454	0,1037
6	0,5091	0,9537	1,4722	0, 0528
7	0,5046	0,9765	1,4859	$0,0269 < \varepsilon$

$$K = \{(0{,}5046;\ 0{,}9765;\ 1{,}4859)^T\}$$

Poznámka: Přesné řešení je (0,5; 1; 1,5).