FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Matematika 1

Systémy lineárních algebraických rovnic

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši,
ale klávesy [PageUp] a [PageDown] nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2016

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

1. SLAR — Systémy lineárních algebraických rovnic

Máme řešit (*najít kořeny*) následující systém rovnic:

$$\begin{aligned} a_{1;1}\cdot x_1 + a_{1;2}\cdot x_2 + \dots + a_{1;n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{2;1}\cdot x_1 + a_{2;2}\cdot x_2 + \dots + a_{2;n}\cdot x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m;1}\cdot x_1 + a_{m;2}\cdot x_2 + \dots + a_{m;n}\cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

Soustavu můžeme pomocí matic zapsat následovně ***A* • *X* = *B***:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & \dots & a_{1;n} \\ a_{2;1} & a_{2;2} & \dots & a_{2;n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m;1} & a_{m;2} & \dots & a_{m;n} \end{bmatrix}}_{A} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

Matici	nazýváme
A	matice ***soustavy***
$[A\|B]$	***rozšířená*** matice soustavy ,
X	matice ***neznámých***
B	matice ***pravých stran***

kde: $$[\mathrm{A} \mid \mathrm{B}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1;1} & a_{1;2} & \dots & a_{1;n} & b_1 \\ a_{2;1} & a_{2;2} & \dots & a_{2;n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m;1} & a_{m;2} & \dots & a_{m;n} & b_m \end{array}\right]$$

2. Řešení SLAR Gaussovou eliminační metodou (GEM)

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 3y + z &= -1 \\ 3x + y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

Postup

Přímý chod: Co nejjednodušším způsobem převedeme rozšířenou matici soustavy na schodovitý tvar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right] \cdot(-2)\ \cdot(-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \\ 0 & -5 & -7 & -11 \end{array}\right] \cdot(-5) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 18 & 54 \end{array}\right]$$

Hodnosti: $h(A) = \mathbf{3} = h(A|B) =$ počet neznámých $\quad\Longrightarrow\quad$ soustava ***má jediné řešení!***

Zpětný chod: Hledáme kořeny následující soustavy rovnic.

$$\begin{aligned} 18z &= 54 \\ -y - 5z &= -13 \\ x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

Postupně dostáváme: $z = \frac{54}{18} = 3$

$y = 13 - 5z = 13 - 5 \cdot 3 = -2$

$x = 6 - 2y - 3z = 6 - 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 = 1$

Řešení:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2.1. GEM — systém nemá řešení

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 1 \\ 2x + y + 4z &= 1 \\ x + 2y + 5z &= 1 \end{aligned}$$

Postup

Přímý chod: Co nejjednodušším způsobem převedeme rozšířenou matici soustavy na schodovitý tvar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2)\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (1) \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Hodnosti: $h(A) = \mathbf{2} \neq \mathbf{3} = h(A|B) \quad \Longrightarrow$ soustava ***nemá řešení!***

2.2. GEM — systém má nekonečně mnoho řešení

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 1 \\ 2x + y + 4z &= 1 \\ x + 2y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

Postup

Přímý chod: Co nejjednodušším způsobem převedeme rozšířenou matici soustavy na schodovitý tvar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} \rfloor \cdot(-2) \cdot(-1) \\ \quad \rfloor \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \rfloor(1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hodnosti: $h(A) = \mathbf{2} = h(A|B) \neq$ počet neznámých $\implies$ soustava ***má nekonečně mnoho řešení!***

Zpětný chod: Hledáme kořeny následující soustavy rovnic.

$$\begin{aligned} -y - 2z &= -1 \\ x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

V první rovnici si můžeme za libovolnou neznámou zvolit libovolný parametr.
Volíme $z = p$ a postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} y &= 1 - 2z = 1 - 2p \\ x &= 1 - y - 3z = 1 - (1 - 2p) - 3p = -p \end{aligned}$$

Řešení:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ 1 - 2p \\ p \end{bmatrix} \qquad \text{kde} \quad p \in \mathbb{R} \quad \text{je libovolné.}$$

2.3. GEM s (částečným) výběrem hlavního prvku (VHP)

$$\begin{aligned} x + 2\,y + 3\,z &= -2 \\ 2\,x + 3\,y + z &= 0 \\ 3\,x + y + 2\,z &= -4 \end{aligned}$$

Postup:

Přímý chod: Před převodem rozšířené matice soustavy na schodovitý tvar provedeme následující:
V kroku k hledáme ve sloupci k řádek p, $p > k$ takové, že $|a_{p;k}| = \max\{|a_{i;k}|; i \geq k\}$. Pokud jej nalezneme, **prohodíme** řádky p a k.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot\left(-\frac{5}{7}\right) \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{18}{7} & -\frac{18}{7} \end{array}\right]$$

Zpětný chod: Hledáme kořeny následující soustavy rovnic.

$$\begin{aligned} \frac{18}{7} \cdot z &= -\frac{18}{7} && \Big| \cdot \frac{7}{18} \\ \frac{7}{3} \cdot y - \frac{1}{3} \cdot z &= \frac{8}{3} && \Big| \cdot \frac{1}{3} \\ 3\,x + y + 2\,z &= -4 \end{aligned}$$

Postupně dostáváme: $z = -1$; $7\,y = 8 + z \Longrightarrow y = 1$; $3\,x = -4 - y - 2\,z \Longrightarrow x = -1$

Řešení:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2.4. GEM s (úplným) VHP

$$\begin{aligned} 8x - \ y - 2z &= \ 0 \\ -x + 7y - \ z &= 10 \\ -2x - \ y + 9z &= 23 \end{aligned}$$

Postup:

Přímý chod: Před převodem rozšířené matice soustavy na schodovitý tvar provedeme následující:
V **prvním** kroku hledáme v matici soustavy prvek s maximální absolutní hodnotou $|a_{p;k}| = \max\{|a_{i;j}|;$ kde $i = 1 \dots m; j = 1 \dots n\}$. Pokud jej nalezneme, **prohodíme** první řádek s řádkem p a první sloupec se sloupcem k, aby se prvek s největší absolutní hodnotou dostal na pozici $a_{1;1}$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 8 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & 10 \\ -2 & -1 & 9 & 23 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 9 & 23 \\ -1 & 7 & -1 & 10 \\ 8 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 9 & -1 & -2 & 23 \\ -1 & 7 & -1 & 10 \\ -2 & -1 & 8 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{9} \ \cdot\frac{2}{9} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -1 & -2 & 23 \\ 0 & \frac{-1+63}{9} & \frac{-2-9}{9} & \frac{23+90}{9} \\ 0 & \frac{-2-9}{9} & \frac{-4+72}{9} & \frac{46+0}{9} \end{array}\right]$$

V kroku k v matici soustavy **vynecháme první** až $k-1$ **řádek** a první až $k-1$ sloupec (dále jsou značeny zeleně) a ve zbytku opět hledáme prvek s největší absolutní hodnotou $|a_{p;q}| = \max\{|a_{i;j}|;$ kde $i = k \dots m; j = k \dots n\}$. Pokud jej nalezneme, **prohodíme** … na pozici $a_{k;k}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -1 & -2 & 23 \\ 0 & \frac{62}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{113}{9} \\ 0 & \frac{-11}{9} & \frac{68}{9} & \frac{46}{9} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -1 & -2 & 23 \\ 0 & \frac{-11}{9} & \frac{68}{9} & \frac{46}{9} \\ 0 & \frac{62}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{113}{9} \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -2 & -1 & 23 \\ 0 & \frac{68}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{46}{9} \\ 0 & \frac{-11}{9} & \frac{62}{9} & \frac{113}{9} \end{array}\right] \end{array} \cdot\frac{11}{68} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -2 & -1 & 23 \\ 0 & \frac{68}{9} & \frac{-11}{9} & \frac{46}{9} \\ 0 & 0 & \frac{4\,095}{612} & \frac{8\,190}{612} \end{array}\right]$$

Zpětný chod: Hledáme kořeny následující soustavy rovnic.

$$\begin{aligned} \frac{4\,095}{612}\cdot y &= \frac{8\,190}{612} \quad \Big| \cdot \frac{612}{4\,095} \\ \frac{68}{9}\cdot x - \frac{11}{9}\cdot y &= \frac{46}{9} \quad \Big| \cdot \frac{1}{9} \\ 9\,z - 2\,x - y &= 23 \end{aligned}$$

Postupně dostáváme: $y = 2;$ $68\,x = 46 + 11\,y \Longrightarrow x = 1;$ $9\,z = 23 + 2\,x + y \Longrightarrow z = 3$

Řešení:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3. Řešení SLAR pomocí inverzní matice soustavy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{X}&=\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A}^{-1}\bullet\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{X}&=\boldsymbol{A}^{-1}\bullet\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{E}\bullet\boldsymbol{X}&=\boldsymbol{A}^{-1}\bullet\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{X}&=\boldsymbol{A}^{-1}\bullet\boldsymbol{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=4\\ 2x+3y+\ \ z&=6\\ 3x+\ \ y+2z&=2 \end{aligned}$$

Inverzní matice existuje pouze pro regulární matici $\boldsymbol{A}$

Inverzní matici A^{-1} sestrojíme pomocí jednotkové matice E

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 2&3&1&0&1&0\\ 3&1&2&0&0&1 \end{array}\right] \cdot(-2)\ \cdot(-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 0&-1&-5&-2&1&0\\ 0&-5&-7&-3&0&1 \end{array}\right]\cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 0&1&5&2&-1&0\\ 0&-5&-7&-3&0&1 \end{array}\right](5) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 0&1&5&2&-1&0\\ 0&0&18&7&-5&1 \end{array}\right]:(18) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\ 0&1&5&2&-1&0\\ 0&0&1&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18} \end{array}\right]\cdot(-5)\ \cdot(-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&-\frac{3}{18}&\frac{15}{18}&-\frac{3}{18}\\ 0&1&0&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}\\ 0&0&1&\frac{7}{18}&\frac{5}{18}&\frac{1}{18} \end{array}\right]\cdot(-2) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}\\ 0&1&0&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}\\ 0&0&1&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18} \end{array}\right] \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{5}{18}&\frac{1}{18}&\frac{7}{18}\\ \frac{1}{18}&\frac{7}{18}&-\frac{5}{18}\\ \frac{7}{18}&-\frac{5}{18}&\frac{1}{18} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}^{-1}}$$

$$\boldsymbol{X}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix} -5&1&7\\ 1&7&-5\\ 7&-5&1 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}4\\6\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-5\cdot4+1\cdot6+7\cdot2}{18}\\ \frac{1\cdot4+7\cdot6+-5\cdot2}{18}\\ \frac{-5\cdot4+1\cdot6+7\cdot2}{18} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$$

4. Řešení SLAR pomocí LU-rozkladu matice soustavy

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 3y + z &= -1 \\ 3x + y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

LU–rozklad lze jen pro čtvercové matice soustavy

Postup ($A = L \bullet U$):

Označíme $Y = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$. Pak: $\boldsymbol{A \bullet X = B}$, $\boldsymbol{L \bullet \underbrace{U \bullet X}_{Y} = B}$, $\boldsymbol{L \bullet Y = B}$ a řešíme dvě soustavy $\boldsymbol{L \bullet Y = B}$, $\boldsymbol{U \bullet X = Y}$

1. Nalezení LU–rozkladu.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2)\cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-5) \\ \\ \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}}_{U} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Vyřešení obou soustav.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} \alpha &= 6 \\ 2\alpha + \beta &= -1 \\ 3\alpha + 5\beta + \gamma &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha &= 6 \\ \beta &= -13 \\ \gamma &= 54 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 6 \\ -13 \\ 54 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -13 \\ 54 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ -y - 5z &= -13 \\ 18z &= 54 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \textbf{Řešení:} \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4.1. Příklad se stejnou maticí soustavy

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= -2\\ 2x+3y+\ \ z &= 0\\ 3x+\ \ y+2z &= -4 \end{aligned}$$

LU–rozklad lze jen pro čtvercové matice soustavy

Postup ($A = L \bullet U$):

Označíme $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}$. Pak:
$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{X} &= \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{L}\bullet\underbrace{\boldsymbol{U}\bullet\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{Y}} &= \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{L}\bullet\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{B}\end{aligned}$$
a řešíme dvě soustavy
$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}\bullet\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{U}\bullet\boldsymbol{X} &= \boldsymbol{Y}\end{aligned}$$

1. Nalezení LU–rozkladu.

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix} \begin{matrix}(-2)\cdot(-3)\\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&-5&-7\end{bmatrix} \begin{matrix}\\ (-5)\\ \\ \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&0&18\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&5&1\end{bmatrix}$$

2. Vyřešení obou soustav.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&5&1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\-4\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned}\alpha\qquad\qquad &= -2\\ 2\alpha+\beta\qquad &= 0\\ 3\alpha+5\beta+\gamma &= -4\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\alpha &= -2\\ \beta &= 4\\ \gamma &= -18\end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix}-2\\4\\-18\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&0&18\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\4\\-18\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned}x+2y+3z &= -2\\ -y-5z &= 4\\ 18z &= -18\end{aligned} \qquad \begin{aligned}x &= -1\\ y &= 1\\ z &= -1\end{aligned} \qquad \textbf{\textit{Řešení:}}\quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}-1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

4.2. Další příklad se stejnou maticí soustavy

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x + 3y + z &= 6 \\ 3x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

LU–rozklad lze jen pro čtvercové matice soustavy

Postup ($A = L \bullet U$):

Označíme $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$. Pak: $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{L} \bullet \underbrace{\boldsymbol{U} \bullet \boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}$ a řešíme dvě soustavy $\boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{U} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}$

1. Nalezení LU–rozkladu.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-5) \end{matrix} \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Vyřešení obou soustav.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} \alpha &= 4 \\ 2\alpha + \beta &= 6 \\ 3\alpha + 5\beta + \gamma &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha &= 4 \\ \beta &= -2 \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ -y - 5z &= -2 \\ 18z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 2 \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{Řešení:} \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Iterační metody řešení systémů lineárních algebraických rovnic

Nejprve soustavu

$$\begin{bmatrix} a_{1;1} & a_{1;2} & \dots & a_{1;n} \\ a_{2;1} & a_{2;2} & \dots & a_{2;n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n;1} & a_{n;2} & \dots & a_{n;n} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{upravíme} \quad \begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \\ \vdots \\ x_n^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_{1;2} & \dots & c_{1;n} \\ c_{2;1} & 0 & \dots & c_{2;n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n;1} & c_{n;2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_n^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

a potom za $x_1^i, \dots, x_n^i$ zvolíme libovolná čísla (jako počáteční aproximaci) a jejich postupným dosazováním do napravo uvedené soustavy rovnic spočítáme $x_1^{i+1}, \dots, x_n^{i+1}$.

Příklad Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 8x - y - 2z &= 0 \\ -x + 7y - z &= 10 \\ -2x - y + 9z &= 23 \end{aligned}$$

1. Soustavu upravíme:

$$\begin{aligned} x &= \phantom{\tfrac{1}{7}x} + \frac{1}{8}y + \frac{2}{8}z + \frac{0}{8} \\ y &= \frac{1}{7}x \phantom{+\tfrac{1}{8}y} + \frac{1}{7}z + \frac{10}{7} \\ z &= \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y \phantom{+\tfrac{1}{7}z} + \frac{23}{9} \end{aligned}$$

2. Zvolíme počáteční aproximaci, například: $x^0 = 0\,; y^0 = 0\,; z^0 = 0$

3. Dosazujeme (budeme zaokrouhlovat na tři desetinná místa):

JACOBIHO metoda

$$\begin{aligned} x^1 &= 0{,}125y^0 + 0{,}250z^0 && = 0 \\ y^1 &\doteq 0{,}143x^0 + 0{,}143z^0 + 1{,}429 && = 1{,}429 \\ z^1 &\doteq 0{,}222x^0 + 0{,}111y^0 + 2{,}556 && = 2{,}556 \end{aligned}$$

GAUSSOVA–SEIDELOVA metoda

$$\begin{aligned} x^1 &= 0{,}125y^0 + 0{,}250z^0 && = 0 \\ y^1 &\doteq 0{,}143x^1 + 0{,}143z^0 + 1{,}429 && = 1{,}429 \\ z^1 &\doteq 0{,}222x^1 + 0{,}111y^1 + 2{,}556 && = 2{,}715 \end{aligned}$$

Postupnou aproximaci řešení systému

$$\begin{aligned} x &= \phantom{0{,}143x +{}} 0{,}125y + 0{,}250z \\ y &\doteq 0{,}143x \phantom{{}+ 0{,}125y} + 0{,}143z + 1{,}429 \\ z &\doteq 0{,}222x + 0{,}111y \phantom{{}+ 0{,}143z} + 2{,}556 \end{aligned}$$

můžeme zapisovat do následující tabulky:

Jacobiho metoda			Gaussova–Seidelova m.		
x	y	z	x	y	z
0	0	0	0	0	0
0	1,429	2,556	0	1,429	2,715
0,818	1,795	2,715	0,857	1,940	2,962
0,903	1,934	2,937	0,983	1,993	2,995
0,976	1,978	2,971	0,998	2,000	3,000
0,990	1,993	2,992	1,000	2,001	3,000

Aproximace kořenů konvergují k přesnému řešení, které v tomto případě je $x = 1\,; y = 2\,; z = 3$. Z teorie víme (například [3, str. 39] nebo [2, str. 40]), že obě tyto metody konvergují, je-li splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. součty absolutních hodnot prvků v každém řádku upravené matice $\boldsymbol{C}$ jsou menší jak **1**. Pak je splněna tzv. ***řádková norma*** a původní matice $\boldsymbol{A}$ je ostře diagonálně dominantní.

2. součty absolutních hodnot prvků v každém sloupci upravené matice $\boldsymbol{C}$ jsou menší jak **1**. Pak je splněna tzv. ***sloupcová norma***.

3. $\sqrt{\sum_{\forall i;j} c_{i,j}^2} < 1$ tedy: $\sqrt{0{,}125^2 + 0{,}25^2 + 0{,}143^2 + 0{,}143^2 + 0{,}222^2 + 0{,}111^2} \doteq 0{,}425$
   a náš systém splňuje tzv. ***euklidovskou normu***.

Příklad Iterační metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{llll} 7x+8y+7z=22 & |.(-1) & |.1 & |.1 \\ 9x+9y-3z=\ \ 3 & |.1 & |.0 & |.(-1) \\ 8x-2y+8z=14 & |.1 & |.(-1) & |.0 \end{array}$$

1. Nejprve soustavu upravíme

$$\begin{array}{lclcl} -1.(i)+1.(ii)+1.(iii) & \Rightarrow & 10x-y-2z=-5 & \Longrightarrow & x=\qquad 0{,}1y+0{,}2z-0{,}5 \\ 1.(i)+0.(ii)-1.(iii) & \Rightarrow & -x+10y-z=\ 8 & \Longrightarrow & y=0{,}1x\qquad +0{,}1z+0{,}8 \\ 1.(i)-1.(ii)+0.(iii) & \Rightarrow & -2x-y+10z=\ 19 & \Longrightarrow & z=0{,}2x+0{,}1y\qquad +1{,}9 \end{array}$$

Ověření, že platí alespoň jedna z následujících podmínek konvergence:

Řádková norma
$$\begin{array}{l} r_1=0+0{,}1+0{,}2=0{,}3 \\ r_2=0{,}1+0+0{,}1=0{,}2 \\ r_3=0{,}2+0{,}1+0=0{,}3 \end{array}\qquad r_i<1\quad \forall i=1,2,3$$

Sloupcová norma
$$\begin{array}{l} s_1=0+0{,}1+0{,}2=0{,}3 \\ s_2=0{,}1+0+0{,}1=0{,}2 \\ s_3=0{,}2+0{,}1+0=0{,}3 \end{array}\qquad s_i<1\quad \forall i=1,2,3$$

Euklidovská norma $\sqrt{0^2+0{,}1^2+0{,}2^2+0{,}1^2+0^2+0{,}1^2+0{,}2^2+0{,}1^2+0^2}=\sqrt{0{,}12}\doteq 0{,}346<1$

2. Zvolíme počáteční aproximaci, například: $x^0=0\,;y^0=0\,;z^0=0$

3. Postupnou aproximaci řešení systému

$$\begin{aligned} x &= \phantom{0{,}1\,x +{}} 0{,}1\,y + 0{,}2\,z - 0{,}5 \\ y &= 0{,}1\,x \phantom{{}+ 0{,}1\,y} + 0{,}1\,z + 0{,}8 \\ z &= 0{,}2\,x + 0{,}1\,y \phantom{{}+ 0{,}1\,z} + 1{,}9 \end{aligned}$$

můžeme zapisovat do následující tabulky, kde výpočty budeme zaokrouhlovat na tři desetinná místa:

Jacobiho metoda			Gaussova–Seidelova m.		
x	y	z	x	y	z
0	0	0	0	0	0
$-0,5$	$0,8$	$1,9$	$-0,5$	$0,75$	$1,875$
$-0,04$	$0,94$	$1,88$	$-0,05$	$0,983$	$1,988$
$-0,03$	$0,984$	$1,986$	$-0,004$	$0,998$	$1,999$
$-0,004$	$0,996$	$1,992$	0	1	2
$-0,002$	$0,999$	$1,999$	0	1	2
$0,000$	1	$1,999$			
$0,000$	1	$2,000$			
$0,000$	1	$2,000$			

Aproximace kořenů v obou případech konvergují k přesnému řešení, které v tomto případě je $\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$

jak si ukážeme dále.

6. Cramerovo pravidlo

můžeme použít, pouze je-li matice soustavy regulární (tj. čtvercová matice s determinantem různým od nuly). Potom má tato soustava právě jedno řešení, které lze psát ve tvaru (např. [4, str. 181])

$$x_i = \frac{\boldsymbol{D}_i}{\boldsymbol{D}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

kde $\boldsymbol{D}$ je determinant matice soustavy a $\boldsymbol{D}_i$ jsou determinanty matice, která vzniknou z matice soustavy tak, že v ní sloupec $\boldsymbol{i}$ nahradíme sloupcem pravých stran soustavy.

Příklad Cramerovým pravidlem řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 7x+8y+7z &= 22 \\ 9x+9y-3z &= 3 \\ 8x-2y+8z &= 14 \end{aligned}$$

Podle výše uvedeného vzorce platí:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\begin{vmatrix} 22 & 8 & 7 \\ 3 & 9 & -3 \\ 14 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 9 & 9 & -3 \\ 8 & -2 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-936} = 0 \quad \boldsymbol{y} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 22 & 7 \\ 9 & 3 & -3 \\ 8 & 14 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 9 & 9 & -3 \\ 8 & -2 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-936}{-936} = 1 \quad \boldsymbol{z} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 8 & 22 \\ 9 & 9 & 3 \\ 8 & -2 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 9 & 9 & -3 \\ 8 & -2 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{-1\,872}{-936} = 2$$

Použitá literatura

[1] BAŠTINEC, J., NOVÁK, M. *Moderní numerické metody.* Brno : Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT, 281 s. [On line] ⟨http://matika.umat.feec.vutbr.cz/inovace/materialy/skripta/mmnm.pdf⟩

[2] DALÍK, J. *Matematika IV, Numerická analýza.* Brno : Fakulta stavební VUT, 2009, 130 s. [Dostupné z adresy:] ⟨https://intranet.fce.vutbr.cz/pedagog/predmety/opory.asp⟩

[3] DIBLÍK, J., BAŠTINEC, J. *Matematika IV.* [skriptum] Brno : VUT, Fakulta elektrotechnická, 1991, 120 s. [Dostupné z adresy:] ⟨http://rschwarz.wz.cz/fast/DB_skripta.pdf⟩

[4] DOSTÁL, Z., VONDRÁK, V. *Lineární algebra.* Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni, 2012, 249 s. [On line] ⟨http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/linearni_algebra.pdf⟩

[5] KUČERA, R., MORÁVKOVÁ, Z. *Numerická matematika* Ostrava : Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2015, 118 s. [On line] ⟨mdg.vsb.cz/portal/nm/nm.pdf⟩

[6] MÍKA, S. *Numerické metody algebry.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, Matematika pro vysoké školy technické, sešit IV, Praha, 1982, 176 s.

[7] REKTORYS, K. A SPOL. *Přehled užité matematiky.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury. Druhé opravené vydání, Praha, 1968, 1140 s.