METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

– Využíváme k řešení přeurčených soustav lineárních algebraických rovnic.

– Přeurčená soustava:
- obsahuje m lineárních rovnic o n neznámých, kde $m > n$ (více rovnic než neznámých),
- zpravidla není řešitelná $\rightarrow$ hledáme její přibližné řešení.

– **Postup:**

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$
$$\downarrow$$
$$\boldsymbol{A^T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A^T} \cdot \boldsymbol{B}$$

Příklad: Pomocí metody nejmenších čtverců určete přibližné řešení soustav lineárních rovnic.

a)
$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x \quad\ &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + \ \ y &= 1 \\ x - \ \ y &= 1 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x \qquad\quad &= 1 \\ -x \qquad + z &= 1 \\ y \qquad &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ z &= 3 \\ -x + y \qquad &= 1 \end{aligned}$$

a) $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ 3y = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 1 - 2y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{array}$

$K = \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)^T \right\}$

b) $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$; $A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x + 3y = 3 \\ -7y = -4 \end{array} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 3 - 3y = 3\left(1 - \tfrac{4}{7}\right) = \tfrac{9}{7} \\ y &= \tfrac{4}{7} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{K = \left\{\left(\tfrac{9}{7}, \tfrac{4}{7}\right)\right\}}}$$

e)

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x - 3y + z &= -1 \\ 4y - 2z &= 1 \\ 2z &= 6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -1 + 3y - z = -1 + 3\cdot\tfrac{7}{4} - 3 = -4 + \tfrac{21}{4} = \tfrac{5}{4} \\ y &= \tfrac{1}{4}(1 + 2z) = \tfrac{1}{4}(1 + 2\cdot 3) = \tfrac{7}{4} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{K = \left\{\left(\tfrac{5}{4}, \tfrac{7}{4}, 3\right)^T\right\}}}$$