FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

Matematika 1

Přeurčené soustavy lineárních algebraických rovnic řešené metodou (součtu) **nejmenších čtverců**

Studijní materiály

Pro listování dokumentem NEpoužívejte kolečko myši nebo zvolte možnost *Full Screen*.

Brno 2016

RNDr. Rudolf Schwarz, CSc.

Obsah

Řešte systém

$$\begin{array}{rrrl} x & & & = 1 \\ & y & & = 2 \\ & & z & = 3 \\ -x & +y & & = 1 \\ & -y & +z & = 2 \\ -x & & +z & = 1 \end{array} \qquad (1)$$

Řešte systém

$$\begin{array}{rrrl} x & & & = 1 \\ & y & & = 2 \\ & & z & = 3 \\ -x & +y & & = 1 \\ & -y & +z & = 2 \\ -x & & +z & = 1 \end{array} \qquad (1)$$

Pokud uvažujeme pouze první tři rovnice, má tento menší systém následující řešení $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Řešte systém

$$\begin{aligned} x \qquad\quad &= 1 \\ y \quad\; &= 2 \\ z &= 3 \\ -x + y \quad\; &= 1 \\ -y + z &= 2 \\ -x \quad\; + z &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Pokud uvažujeme pouze první tři rovnice, má tento menší systém následující řešení $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Ovšem po dosazení těchto hodnot do páté rovnice dostáváme: $-2 + 3 \neq 2$

Řešte systém

$$
\begin{array}{rrrl}
x & & & = 1 \\
 & y & & = 2 \\
 & & z & = 3 \\
-x & +y & & = 1 \\
 & -y & +z & = 2 \\
-x & & +z & = 1
\end{array} \qquad (1)
$$

Pokud uvažujeme pouze první tři rovnice, má tento menší systém následující řešení $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Ovšem po dosazení těchto hodnot do páté rovnice dostáváme: $-2 + 3 \neq 2$

Jak je zřejmé, celá soustava (1) všech šesti rovnic $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ nemá *„klasické"* řešení!

Předpokládejme, že soustava (1) odpovídá nějaké reálné skutečnosti, pouze jsme experimentálně poněkud nepřesně určili jednotlivé koeficienty. Takováto neřešitelná soustava se nazývá ***přeurčená***. Jak získat alespoň přibližné řešení $\boldsymbol{X}_p$ takovéto soustavy?

Řešte systém

$$\begin{array}{rrrl} x & & & = 1 \\ & y & & = 2 \\ & & z & = 3 \\ -x & +y & & = 1 \\ & -y & +z & = 2 \\ -x & & +z & = 1 \end{array} \qquad (1)$$

Pokud uvažujeme pouze první tři rovnice, má tento menší systém následující řešení $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Ovšem po dosazení těchto hodnot do páté rovnice dostáváme: $-2 + 3 \neq 2$

$$\begin{array}{rrrl} x & & & = 1 + \varepsilon_1 \\ & y & & = 2 + \varepsilon_2 \\ & & z & = 3 + \varepsilon_3 \\ -x & +y & & = 1 + \varepsilon_4 \\ & -y & +z & = 2 + \varepsilon_5 \\ -x & & +z & = 1 + \varepsilon_6 \end{array} \qquad (2)$$

Jak je zřejmé, celá soustava (1) všech šesti rovnic $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ nemá *„klasické“* řešení!

Předpokládejme, že soustava (1) odpovídá nějaké reálné skutečnosti, pouze jsme experimentálně poněkud nepřesně určili jednotlivé koeficienty. Takováto neřešitelná soustava se nazývá ***přeurčená***. Jak získat alespoň přibližné řešení $\boldsymbol{X}_p$ takovéto soustavy?

K pravé straně každé rovnice soustavy (1) přidáme **vhodnou** konstantu ε, tedy: $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{B} + \mathcal{E}$ a dostaneme soustavu (2), která je již řešitelná.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{X}_p} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}}$$

Samozřejmě pro jinou volbu matice $\mathcal{E}$ dostaneme jiné řešení soustavy (2). Budeme tedy hledat takové řešení, které bude co nejlepším kompromisem, kdy soustava (2) se bude ***co nejvíce blížit*** soustavě (1), nebo-li ke každé rovnici přičteme co nejmenší číslo (reziduum) ε. Nebo ještě lépe, co nejmenší součet všech reziduí, bez ohledu na jejich znaménka ($\Longrightarrow$ absolutní hodnota nebo druhá mocnina reziduí).

Řešte systém

$$\begin{array}{rrrl} x & & & = 1 \\ & y & & = 2 \\ & & z & = 3 \\ -x & +y & & = 1 \\ & -y & +z & = 2 \\ -x & & +z & = 1 \end{array} \qquad (1)$$

Pokud uvažujeme pouze první tři rovnice, má tento menší systém následující řešení $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Ovšem po dosazení těchto hodnot do páté rovnice dostáváme: $-2 + 3 \neq 2$

$$\begin{array}{rrrl} x & & & = 1 + \varepsilon_1 \\ & y & & = 2 + \varepsilon_2 \\ & & z & = 3 + \varepsilon_3 \\ -x & +y & & = 1 + \varepsilon_4 \\ & -y & +z & = 2 + \varepsilon_5 \\ -x & & +z & = 1 + \varepsilon_6 \end{array} \qquad (2)$$

Jak je zřejmé, celá soustava (1) všech šesti rovnic $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ nemá *„klasické“* řešení!

Předpokládejme, že soustava (1) odpovídá nějaké reálné skutečnosti, pouze jsme experimentálně poněkud nepřesně určili jednotlivé koeficienty. Takováto neřešitelná soustava se nazývá ***přeurčená***. Jak získat alespoň přibližné řešení $\boldsymbol{X}_p$ takovéto soustavy?

K pravé straně každé rovnice soustavy (1) přidáme **vhodnou** konstantu ε, tedy: $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{B} + \mathcal{E}$ a dostaneme soustavu (2), která je již řešitelná.

$$\mathcal{E}_{[1;2;3]} = \begin{bmatrix} 1+0+0-1 \\ 0+2+0-2 \\ 0+0+3-3 \\ -1+2+0-1 \\ 0-2+3-2 \\ -1+0+3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{E}_{[0;0;0]} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \bullet \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{X}_p} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}}$$

Samozřejmě pro jinou volbu matice $\mathcal{E}$ dostaneme jiné řešení soustavy (2). Budeme tedy hledat takové řešení, které bude co nejlepším kompromisem, kdy soustava (2) se bude ***co nejvíce blížit*** soustavě (1), nebo-li ke každé rovnici přičteme co nejmenší číslo (reziduum) ε. Nebo ještě lépe, co nejmenší součet všech reziduí, bez ohledu na jejich znaménka ($\Longrightarrow$ absolutní hodnota nebo druhá mocnina reziduí).

Metoda nejmenších čtverců (MNC)

Jak již název napovídá, budeme hledat takovou matici $\boldsymbol{X}_p$, aby součet druhých mocnin odchylek [1] (rezi-duí) $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2$ v systému (2) byl minimální. Takovému **přibližnému** řešení říkáme ***zobecněné řešení*** nebo **řešení ve smyslu metody nejmenších čtverců**. [3, str. 122]

Zobecněné řešení $\boldsymbol{X}_p$ je řešením tzv. ***Gaussovy normální soustavy rovnic***. [2, str. 80]

$$\boldsymbol{A}^T \bullet \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{A}^T \bullet \boldsymbol{B}$$

V našem případě

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Což je

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{nebo jinak:} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \quad \text{Tento systém vyřešíme.}$$

---

[1] Výraz $\sqrt{\sum_{i=1}^{6} \varepsilon_i^2}$ nazýváme normou (velikostí) vektoru $\mathcal{E}$ a označujeme $||\mathcal{E}||$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \cdot (2) \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

Ze 3. rovnice: $\begin{aligned} 4y &= 7 \\ y &= \tfrac{7}{4} \end{aligned}$ ze 2. r.: $\begin{aligned} 8y - 4z &= 2 \\ -4z &= 2 - 8 \cdot \tfrac{7}{4} \\ z &= 3 \end{aligned}$ z 1. r.: $\begin{aligned} x + 5y - 3z &= 1 \\ x &= 1 - 5 \cdot \tfrac{7}{4} + 3 \cdot 3 \\ x &= \tfrac{5}{4} \end{aligned}$

Zobecněné řešení systému (1) $\begin{array}{rrrl} x & & & = 1 \\ & y & & = 2 \\ & & z & = 3 \\ -x & +y & & = 1 \\ & -y & +z & = 2 \\ -x & & +z & = 1 \end{array}$ je tedy $\boldsymbol{X}_p = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\mathcal{E}_{\left[\frac{5}{4};\frac{7}{4};3\right]} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} - 1 \\ \frac{7}{4} - 2 \\ 3 - 3 \\ -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} - 1 \\ -\frac{7}{4} + 3 - 2 \\ -\frac{5}{4} + 3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$||\mathcal{E}|| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{4}\right)^2 + 0^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+1+0+4+9+9}}{4} = \frac{\sqrt{24}}{4} = \frac{\sqrt{4 \cdot 6}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 \cdot 1{,}5}}{2} = \sqrt{1{,}5}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x - y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x - y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

Normální soustava: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ 2x-y &= 4 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

Normální soustava: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -6 \end{array}\right]$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ 2x-y &= 4 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

Normální soustava: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l}] \\ \cdot(3) \end{array} \sim$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ 2x-y &= 4 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

Normální soustava: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rceil \\ \cdot(3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 7 & -8 \\ -2 & 3 & -6 \end{array}\right]$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ 2x-y &= 4 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

Normální soustava: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -6 \end{array}\right] \begin{matrix}] \\ \cdot(3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 7 & -8 \\ -2 & 3 & -6 \end{array}\right] \Rightarrow \quad y = -\frac{8}{7}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ 2x-y &= 4 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

Normální soustava: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -6 \end{array}\right] \begin{matrix}] \\ \cdot(3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 7 & -8 \\ -2 & 3 & -6 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$y = -\frac{8}{7}$$

$$x = \frac{-6-3\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)}{-2} = \frac{\frac{-42+24}{7}}{-2} = \frac{-18}{-14} = \frac{9}{7}$$

$$\boldsymbol{X}_p = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ 2x-y &= 4 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

Normální soustava: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 10 \\ -2 & 3 & -6 \end{array}\right] \begin{matrix}] \\ \cdot(3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 7 & -8 \\ -2 & 3 & -6 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} y &= -\frac{8}{7} \\ x &= \frac{-6-3\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)}{-2} = \frac{\frac{-42+24}{7}}{-2} = \frac{-18}{-14} = \frac{9}{7} \end{aligned} \qquad \boldsymbol{X}_p = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

Vektor vzniklých chyb

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} + \left(-\frac{8}{7}\right) - 0 \\ 2 \cdot \frac{9}{7} - \left(-\frac{8}{7}\right) - 4 \\ \frac{9}{7} - \left(-\frac{8}{7}\right) - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x+y &= 0\\ 2x-y &= 4\\ x-y &= 2\end{aligned}$$

Normální soustava: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 2 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 0\\ 4\\ 2\end{bmatrix}$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -2 & 10\\ -2 & 3 & -6\end{array}\right]\begin{matrix}]\\ \cdot(3)\end{matrix}\sim\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 7 & -8\\ -2 & 3 & -6\end{array}\right]\quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{l} y=-\dfrac{8}{7}\\ x=\dfrac{-6-3\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)}{-2}=\dfrac{\frac{-42+24}{7}}{-2}=\dfrac{-18}{-14}=\dfrac{9}{7}\end{array}\qquad \boldsymbol{X}_p=\begin{bmatrix}\dfrac{9}{7}\\ -\dfrac{8}{7}\end{bmatrix}$$

Vektor vzniklých chyb

$$\mathcal{E}=\begin{bmatrix}\frac{9}{7}+\left(-\frac{8}{7}\right)-0\\ 2\cdot\frac{9}{7}-\left(-\frac{8}{7}\right)-4\\ \frac{9}{7}-\left(-\frac{8}{7}\right)-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7}\\ -\frac{2}{7}\\ \frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

a jeho norma

$$||\mathcal{E}||=\sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{1+4+9}}{7}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$
\begin{aligned}
x \qquad\qquad &= 1 \\
-x \qquad + z &= 1 \\
y \qquad &= 2 \\
-y + z &= 2 \\
z &= 3 \\
-x + y \qquad &= 1
\end{aligned}
$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x \quad\quad\quad &= 1 \\ -x \quad\quad + z &= 1 \\ y \quad\quad &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ z &= 3 \\ -x + y \quad\quad &= 1 \end{aligned}$$

Normální soustava:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x \quad\quad\quad &= 1 \\ -x \quad + z &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ z &= 3 \\ -x + y \quad &= 1 \end{aligned}$$

Normální soustava:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^T \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x \quad\quad\quad &= 1 \\ -x \quad\quad + z &= 1 \\ y \quad\quad &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ z &= 3 \\ -x + y \quad\quad &= 1 \end{aligned}$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^T \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \big] \\ \cdot(2) \end{matrix} \sim$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= 1 \\ -x \quad + z &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ z &= 3 \\ -x + y \quad &= 1 \end{aligned}$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \Big] \cdot(2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 11 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= 1 \\ -x \quad + z &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ z &= 3 \\ -x + y \quad &= 1 \end{aligned}$$

Normální soustava:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \Big] \cdot (2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 11 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 8 & 17 \end{array}\right] \implies z = \frac{12}{4} = 3$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{array}{rcl} x & & = 1 \\ -x & +z & = 1 \\ y & & = 2 \\ -y & +z & = 2 \\ & z & = 3 \\ -x+y & & = 1 \end{array}$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \Big| \cdot (2) \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 5 & 11 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 8 & 17 \end{array}\right] \Longrightarrow z = \frac{12}{4} = 3$$

$$y = \frac{17-8\cdot 3}{-4} = \frac{7}{4}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= 1 \\ -x \quad + z &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ z &= 3 \\ -x + y \quad &= 1 \end{aligned}$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \Big|\cdot(2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 11 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 8 & 17 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 11 + 3 \cdot \tfrac{7}{4} - 5 \cdot 3 = \frac{5}{4} \\ z &= \tfrac{12}{4} = 3 \\ y &= \tfrac{17-8\cdot 3}{-4} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Zobecněné řešení

$$\boldsymbol{X}_p = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= 1 \\ -x \quad + z &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ z &= 3 \\ -x + y \quad &= 1 \end{aligned}$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \Big|\cdot(2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 11 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 8 & 17 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 11 + 3 \cdot \tfrac{7}{4} - 5 \cdot 3 = \frac{5}{4} \\ z &= \tfrac{12}{4} = 3 \\ y &= \tfrac{17-8\cdot 3}{-4} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Zobecněné řešení

$$X_p = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$$

vektor vzniklých chyb

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} + 0 + 0 - 1 \\ -\frac{5}{4} + 0 + 3 - 1 \\ 0 + \frac{7}{4} + 0 - 2 \\ 0 - \frac{7}{4} + 3 - 2 \\ 0 + 0 + 3 - 3 \\ -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} + 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x \quad\quad\quad &= 1 \\ -x \quad\; + z &= 1 \\ y \quad\;\; &= 2 \\ -y + z &= 2 \\ z &= 3 \\ -x + y \quad\;\; &= 1 \end{aligned}$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^T \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \Big|_{\cdot(2)} \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 5 & 11 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 8 & 17 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x &= 11 + 3 \cdot \tfrac{7}{4} - 5 \cdot 3 = \frac{5}{4} \\ z &= \tfrac{12}{4} = 3 \\ y &= \tfrac{17 - 8 \cdot 3}{-4} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Zobecněné řešení

$$\boldsymbol{X}_p = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 3 \end{bmatrix}$$

vektor vzniklých chyb

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} + 0 + 0 - 1 \\ -\frac{5}{4} + 0 + 3 - 1 \\ 0 + \frac{7}{4} + 0 - 2 \\ 0 - \frac{7}{4} + 3 - 2 \\ 0 + 0 + 3 - 3 \\ -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} + 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a jeho norma

$$||\mathcal{E}|| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(-\tfrac{3}{4}\right)^2 + 0^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + 9 + 1 + 9 + 0 + 4}}{4} = \frac{\sqrt{24}}{4} = \frac{\sqrt{4 \cdot 6}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 1{,}5}}{2} = \sqrt{1{,}5}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 0{,}241 \\
2\,x + y &= 0{,}468 \\
3\,x + y &= 0{,}692 \\
4\,x + y &= 0{,}927 \\
5\,x + y &= 1{,}156
\end{aligned}
$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x + y &= 0{,}241 \\ 2x + y &= 0{,}468 \\ 3x + y &= 0{,}692 \\ 4x + y &= 0{,}927 \\ 5x + y &= 1{,}156 \end{aligned}$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 0{,}241 \\ 0{,}468 \\ 0{,}692 \\ 0{,}927 \\ 1{,}156 \end{bmatrix}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x + y &= 0{,}241 \\ 2x + y &= 0{,}468 \\ 3x + y &= 0{,}692 \\ 4x + y &= 0{,}927 \\ 5x + y &= 1{,}156 \end{aligned}$$

Normální soustava: $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 0{,}241 \\ 0{,}468 \\ 0{,}692 \\ 0{,}927 \\ 1{,}156 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 55 & 15 & 12{,}741 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right]$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x + y &= 0{,}241 \\ 2\,x + y &= 0{,}468 \\ 3\,x + y &= 0{,}692 \\ 4\,x + y &= 0{,}927 \\ 5\,x + y &= 1{,}156 \end{aligned}$$

Normální soustava:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 0{,}241 \\ 0{,}468 \\ 0{,}692 \\ 0{,}927 \\ 1{,}156 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 55 & 15 & 12{,}741 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \begin{array}{l}] \\ \cdot(-3) \end{array}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 0{,}241\\
2x + y &= 0{,}468\\
3x + y &= 0{,}692\\
4x + y &= 0{,}927\\
5x + y &= 1{,}156
\end{aligned}
$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 0{,}241 \\ 0{,}468 \\ 0{,}692 \\ 0{,}927 \\ 1{,}156 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 55 & 15 & 12{,}741 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \begin{matrix}] \\ \cdot(-3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 2{,}289 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right]$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x+y&=0{,}241\\ 2x+y&=0{,}468\\ 3x+y&=0{,}692\\ 4x+y&=0{,}927\\ 5x+y&=1{,}156 \end{aligned}$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 0{,}241 \\ 0{,}468 \\ 0{,}692 \\ 0{,}927 \\ 1{,}156 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 55 & 15 & 12{,}741 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \begin{array}{l}] \\ \cdot(-3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 2{,}289 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \Rightarrow x = \frac{2{,}289}{10} = 0{,}228\,9$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x + y &= 0{,}241 \\ 2\,x + y &= 0{,}468 \\ 3\,x + y &= 0{,}692 \\ 4\,x + y &= 0{,}927 \\ 5\,x + y &= 1{,}156 \end{aligned}$$

Normální soustava: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 0{,}241 \\ 0{,}468 \\ 0{,}692 \\ 0{,}927 \\ 1{,}156 \end{bmatrix}$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 55 & 15 & 12{,}741 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \begin{matrix}] \\ \cdot(-3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 2{,}289 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x &= \frac{2{,}289}{10} = 0{,}228\,9 \\ y &= \frac{3{,}484 - 15 \cdot 0{,}228\,9}{5} = 0{,}010\,1 \end{aligned}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení $\boldsymbol{X}_p$ přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x + y &= 0{,}241 \\ 2\,x + y &= 0{,}468 \\ 3\,x + y &= 0{,}692 \\ 4\,x + y &= 0{,}927 \\ 5\,x + y &= 1{,}156 \end{aligned}$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^T \bullet \begin{bmatrix} 0{,}241 \\ 0{,}468 \\ 0{,}692 \\ 0{,}927 \\ 1{,}156 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 55 & 15 & 12{,}741 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \begin{matrix}] \\ \cdot(-3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 2{,}289 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x &= \tfrac{2{,}289}{10} = 0{,}228\,9 \\ y &= \tfrac{3{,}484 - 15\cdot 0{,}228\,9}{5} = 0{,}010\,1 \end{aligned}$$

Zobecněné řešení

$$\boldsymbol{X}_p = \begin{bmatrix} 0{,}228\,9 \\ 0{,}010\,1 \end{bmatrix}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x + y &= 0{,}241 \\ 2x + y &= 0{,}468 \\ 3x + y &= 0{,}692 \\ 4x + y &= 0{,}927 \\ 5x + y &= 1{,}156 \end{aligned}$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 0{,}241 \\ 0{,}468 \\ 0{,}692 \\ 0{,}927 \\ 1{,}156 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 55 & 15 & 12{,}741 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \begin{matrix}] \\ \cdot(-3) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 2{,}289 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x &= \frac{2{,}289}{10} = 0{,}228\,9 \\ y &= \frac{3{,}484 - 15 \cdot 0{,}228\,9}{5} = 0{,}010\,1 \end{aligned}$$

Zobecněné řešení

$$X_p = \begin{bmatrix} 0{,}228\,9 \\ 0{,}010\,1 \end{bmatrix}$$

Vektor vzniklých chyb

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0{,}228\,9 + 0{,}010\,1 - 0{,}241 \\ 2 \cdot 0{,}228\,9 + 0{,}010\,1 - 0{,}468 \\ 3 \cdot 0{,}228\,9 + 0{,}010\,1 - 0{,}692 \\ 4 \cdot 0{,}228\,9 + 0{,}010\,1 - 0{,}927 \\ 5 \cdot 0{,}228\,9 + 0{,}010\,1 - 1{,}156 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}002 \\ -0{,}000\,1 \\ 0{,}004\,8 \\ -0{,}001\,3 \\ -0{,}001\,4 \end{bmatrix}$$

Pomocí MNC nalezněte zobecněné řešení X_p přeurčené soustavy:

$$\begin{aligned} x + y &= 0{,}241 \\ 2\,x + y &= 0{,}468 \\ 3\,x + y &= 0{,}692 \\ 4\,x + y &= 0{,}927 \\ 5\,x + y &= 1{,}156 \end{aligned}$$

Normální soustava:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^T \bullet \begin{bmatrix} 0{,}241 \\ 0{,}468 \\ 0{,}692 \\ 0{,}927 \\ 1{,}156 \end{bmatrix}$$

Budeme řešit systém:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 55 & 15 & 12{,}741 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \begin{array}{l}] \\ \cdot(-3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 2{,}289 \\ 15 & 5 & 3{,}484 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{l} x = \frac{2{,}289}{10} = 0{,}228\,9 \\ y = \frac{3{,}484 - 15\cdot 0{,}228\,9}{5} = 0{,}010\,1 \end{array}$$

Zobecněné řešení

$$\boldsymbol{X}_p = \begin{bmatrix} 0{,}228\,9 \\ 0{,}010\,1 \end{bmatrix}$$

Vektor vzniklých chyb

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0{,}228\,9 + 0{,}010\,1 - 0{,}241 \\ 2\cdot 0{,}228\,9 + 0{,}010\,1 - 0{,}468 \\ 3\cdot 0{,}228\,9 + 0{,}010\,1 - 0{,}692 \\ 4\cdot 0{,}228\,9 + 0{,}010\,1 - 0{,}927 \\ 5\cdot 0{,}228\,9 + 0{,}010\,1 - 1{,}156 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}002 \\ -0{,}000\,1 \\ 0{,}004\,8 \\ -0{,}001\,3 \\ -0{,}001\,4 \end{bmatrix}$$

a jeho norma

$$||\mathcal{E}|| = \sqrt{(-0{,}002)^2 + (-0{,}000\,1)^2 + (0{,}004\,8)^2 + (-0{,}001\,3)^2 + (-0{,}001\,4)^2} =$$

$$= \sqrt{0{,}000\,030\,7} \doteq 0{,}005\,54$$

Použitá literatura

[1] Dalík, J. *Matematika IV, Numerická analýza.* Brno : Fakulta stavební VUT, 2009, 130 s. [Dostupné z adresy:] ⟨[https://intranet.fce.vutbr.cz/pedagog/predmety/opory.asp]⟩

[2] Dávid, A. *Numerické metódy na osobnom počítači.* Bratislava : Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1988, 184 s.

[3] Míka, S. *Numerické metody algebry.* Praha : Státní nakladatelství technické literatury, Matematika pro vysoké školy technické, sešit IV, Praha, 1982, 176 s.