1 Určete rozklad na parciální zlomky pro funkci:

$$\frac{6x^2 + 9x + 11}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}$$

---

1. funkce je ryzí racionální, dělit nemusíme
2. určíme rozklad jmenovatele:
   využijeme Hornerovo schéma (možné celočíselné kořeny: $+1, -1, +3, -3$)

	1	3	5	3
$x = -1$	1	2	3	0

   číslo -1 je kořen jmenovatele, zbývá polynom druhého stupně, který nemá reálné kořeny (záporný diskriminant).
   Rozklad jmenovatele:
   $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(x^2 + 2x + 3)$
3. určíme obecný tvar rozkladu na parciální zlomky:
   $$\frac{6x^2 + 9x + 11}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 3}$$
4. dopočítáme konstanty:
   $$6x^2 + 9x + 11 = A(x^2 + 2x + 3) + (Bx + C)(x + 1)$$
   $$6x^2 + 9x + 11 = Ax^2 + 2Ax + 3A + Bx^2 + Cx + Bx + C$$

   sestavíme rovnice pro výpočet konstant:
   $$\begin{aligned} x^2 :& \quad 6 = A + B \\ x^1 :& \quad 9 = 2A + C + B \\ x^0 :& \quad 11 = 3A + C \end{aligned}$$

   z první rovnice vyjádříme B : $\quad B = 6 - A$
   ze třetí rovnice vyjádříme C : $\quad C = 11 - 3A$
   a dosadíme do druhé rovnice:
   $9 = 2A + 11 - 3A + 6 - A \Longrightarrow -8 = -2A \Rightarrow A = 4$
   tedy $B = 6 - A = 6 - 4 = 2$ a $C = 11 - 3A = 11 - 12 = -1$

   Výsledek:
   $$\frac{6x^2 + 9x + 11}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3} = \frac{4}{x + 1} + \frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 3}$$

2 Určete rozklad na parciální zlomky a znaménko racionální funkce:

$$\frac{x^3+2x^2+x}{x^2+4x+4}$$

Rozklad na parciální zlomky:

1. funkce není ryzí racionální, nutno dělit:
$$\begin{array}{rcl} (x^3+2x^2+\ x) & : & (x^2+4x+4) \quad = \quad x-2 \\ \underline{-(x^3+4x^2+4x)} & & \\ -2x^2-3x & & \\ \underline{-(-2x^2-8x-8)} & & \\ 5x+8 & & \end{array}$$
Tedy danou racionální funkci můžeme zapsat jako součet polynomu a ryzí racionální funkce:
$$\frac{x^3+2x^2+x}{x^2+4x+4} = x-2+\frac{5x+8}{x^2+4x+4}$$

2. určíme rozklad jmenovatele: $x^2+4x+4=(x+2)^2$

3. určíme obecný tvar rozkladu na parciální zlomky (pro část, která je ryzí racionální funkcí):
$$\frac{5x+8}{x^2+4x+4} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}$$

4. dopočítáme konstanty:
$$5x+8 = A(x+2)+B$$
$$5x+8 = Ax+2A+B$$
sestavíme rovnice pro výpočet konstant:
$$\begin{array}{ll} x^1: & 5=A \\ x^0: & 8=2A+B \Rightarrow B=-2 \end{array}$$

Výsledek:

$$\frac{x^3+2x^2+x}{x^2+4x+4} = x-2+\frac{5}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}$$

Znaménko:
určíme rozklad čitatele i jmenovatele:

$$\frac{x^3+2x^2+x}{x^2+4x+4} = \frac{x(x^2+2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x(x+1)^2}{(x+2)^2}$$

kořeny čitatele: $x=0$ (násobnost 1) a $x=-1$ (násobnost 2)
kořeny jmenovatele: $x=-2$ (násobnost 2)
Znaménko se mění jen v bodě 0, ostatní kořeny mají sudou násobnost a znaménko nemění.

V intervalu $(0,\infty)$ je funkce kladná,v intervalech $(-\infty,-2)$ a $(-2,0)$ je funkce záporná.
Definiční obor: $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$

3 Určete rozklad na parciální zlomky pro funkci:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3+6x^2+6x+5}$$

---

1. funkce je ryzí racionální, dělit nemusíme
2. určíme rozklad jmenovatele:
   využijeme Hornerovo schéma (možné celočíselné kořeny: $+1,-1,+5,-5$)

	1	6	6	5
$x=-5$	1	1	1	0

   číslo -5 je kořen jmenovatele, zbývá polynom druhého stupně, který nemá reálné kořeny (záporný diskriminant).
   Rozklad jmenovatele:

   $$x^3+6x^2+6x+5=(x+5)(x^2+x+1)$$

3. určíme obecný tvar rozkladu na parciální zlomky:

   $$\frac{x^2-3x+2}{(x+5)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+5}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

4. dopočítáme konstanty:

   $$\begin{aligned}x^2-3x+2&=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+5)\\x^2-3x+2&=Ax^2+Ax+A+Bx^2+5Bx+Cx+5C\end{aligned}$$

   sestavíme rovnice pro výpočet konstant:

   $$\begin{aligned}x^2:&\qquad 1=A+B\\x^1:&\qquad -3=A+C+5B\\x^0:&\qquad 2=A+5C\end{aligned}$$

   z první rovnice vyjádříme B : $\quad B=1-A$
   ze třetí rovnice vyjádříme C : $\quad C=\dfrac{2-A}{5}$
   a dosadíme do druhé rovnice:

   $$-3=A+\frac{2-A}{5}+5-5A$$

   obě strany rovnice vynásobíme číslem 5:

   $$-15=5A+2-A+25-25A\Longrightarrow -42=-21A\Rightarrow A=2$$

   tedy $B=1-A=1-2=-1$ a $C=\dfrac{2-A}{5}=\dfrac{2-2}{5}=0$

   Výsledek:

   $$\frac{x^2-3x+2}{x^3+6x^2+6x+5}=\frac{2}{x+5}-\frac{x}{x^2+x+1}$$

4 Určete definiční obor, znaménko a svislé asymptoty funkce:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$$

---

a) DEFINIČNÍ OBOR
Definičním oborem je množina všech reálných čísel, kromě kořenů jmenovatele.

Určíme rozklad jmenovatele s využitím Hornerova schématu: (možné celočíselné kořeny: $+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6$)

	1	6	11	6
$x = -1$	1	5	6	0

číslo -1 je kořen jmenovatele, zbývá polynom druhého stupně x^2+5x+6, který můžeme rozložit na součin $(x+2)(x+3)$.
Tedy jmenovatel má kořeny: $-1, -2 - 3$

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, -2, -3\}$

b) ZNAMÉNKO
Funkce e^x je vždy kladná, znaménko se mění jen v kořenech jmenovatele:
V intervalech $(-1, \infty)$ a $(-3, -2)$ je funkce kladná, v intervalech $(-\infty, -3)$ a $(-2, -1)$ je funkce záporná.

c) SVISLÉ ASYMPTOTY
Svislé asymptoty mohou být v bodech, které nepatří do definičního oboru, potřebujeme určit limity:

- pro $x = -1$:

$$\lim_{x\to\ -1} \frac{e^x}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} = \lim_{x\to\ -1} \frac{e^x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \lim_{x\to\ -1} \frac{1}{x+1} \quad\cdot\quad \lim_{x\to\ -1} \frac{e^x}{(x+2)(x+3)}$$

určíme limity jednostranné:

$$\lim_{x\to\ -1^+} \frac{1}{x+1} \quad\cdot\quad \lim_{x\to\ -1^+} \frac{e^x}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{0^+} \cdot \frac{e^{-1}}{2} = \infty \cdot \frac{1}{2e} = \infty$$

$$\lim_{x\to\ -1^-} \frac{1}{x+1} \quad\cdot\quad \lim_{x\to\ -1^-} \frac{e^x}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{0^-} \cdot \frac{e^{-1}}{2} = -\infty \cdot \frac{1}{2e} = -\infty$$

Svislá asymptota: $x = -1$

- pro $x = -2$:

$$\lim_{x\to\ -2} \frac{e^x}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} = \lim_{x\to\ -2} \frac{e^x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \lim_{x\to\ -2} \frac{1}{x+2} \quad\cdot\quad \lim_{x\to\ -2} \frac{e^x}{(x+1)(x+3)}$$

určíme limity jednostranné:

$$\lim_{x\to\ -2^+} \frac{1}{x+2} \quad\cdot\quad \lim_{x\to\ -2^+} \frac{e^x}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{0^+} \cdot \frac{e^{-2}}{-1} = \infty \cdot \frac{-1}{e^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\ -2^-} \frac{1}{x+2} \quad\cdot\quad \lim_{x\to\ -2^-} \frac{e^x}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{0^-} \cdot \frac{e^{-2}}{-1} = -\infty \cdot \frac{-1}{e^2} = \infty$$

Svislá asymptota: $x = -2$

- pro $x = -3$:

$$\lim_{x\to\ -3} \frac{e^x}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} = \lim_{x\to\ -3} \frac{e^x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \lim_{x\to\ -3} \frac{1}{x+3} \quad \cdot \quad \lim_{x\to\ -3} \frac{e^x}{(x+1)(x+2)}$$

určíme limity jednostranné:

$$\lim_{x\to\ -3^+} \frac{1}{x+3} \quad \cdot \quad \lim_{x\to\ -3^+} \frac{e^x}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{0^+} \cdot \frac{e^{-3}}{2} = \infty \cdot \frac{1}{2e^3} = \infty$$

$$\lim_{x\to\ -3^-} \frac{1}{x+3} \quad \cdot \quad \lim_{x\to\ -3^-} \frac{e^x}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{0^-} \cdot \frac{e^{-3}}{2} = -\infty \cdot \frac{1}{2e^3} = -\infty$$

Svislá asymptota: $x = -3$

5 Určete definiční obor, znaménko a šikmé asymptoty funkce:

$$f(x) = \frac{3x^4 - 12}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}$$

---

a) DEFINIČNÍ OBOR
Definičním oborem je množina všech reálných čísel, kromě kořenů jmenovatele.
Určíme rozklad jmenovatele s využitím Hornerova schématu: (možné celočíselné kořeny: $+1, -1, +3, -3$)

	1	3	5	3
$x = -1$	1	2	3	0

číslo -1 je kořen jmenovatele, zbývá polynom druhého stupně $x^2 + 2x + 3$, který nemá reálné kořeny (záporný diskriminant). Tedy jmenovatel má jediný reálný kořen: -1.

Definiční obor: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) ZNAMÉNKO
Znaménko se mění v kořenech čitatele a jmenovatele liché násobnosti.
Určíme kořeny čitatele:
$3x^4 - 12 = 3(x^4 - 4) = 3(x^2 + 2)(x^2 - 2) = 3(x^2 + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$
Kořeny čitatele jsou: $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$
Kořen jmenovatele je: -1. Všechny kořeny mají násobnost 1 a mění znaménko.

Znaménko:
V intervalech $(-\sqrt{2}, -1)$ a $(\sqrt{2}, \infty)$ je funkce kladná, v intervalech $(-\infty, -\sqrt{2})$ a $(-1, \sqrt{2})$ je funkce záporná.

c) ŠIKMÁ ASYMPTOTA: Rovnice: $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 12}{x(x^3 + 3x^2 + 5x + 3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 12}{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^4(3 - \frac{12}{x^4})}{x^4(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3})} = 3$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^4 - 12}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3} - 3x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 12 - 3x^4 - 9x^3 - 15x^2 - 9x}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-9x^3 - 15x^2 - 9x - 12}{x^3 + 3x^2 + 5x + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3(-9 + \frac{-15}{x} + \frac{-9}{x^2} + \frac{-12}{x^3})}{x^3(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3})} = -9$$

stejný výpočet limit pro $x \to -\infty$

Šikmá asymptota: $y = 3x - 9$ pro $x \to \pm\infty$

6 Je dána funkce:

$$f(x) = \arctan \frac{x-1}{x-2}$$

Určete:
a) definiční obor
b) rovnici tečny a normály v bodě $x_0 = 1$
c) vodorovnou asymptotu

---

a) DEFINIČNÍ OBOR

$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

b) ROVNICE TEČNY A NORMÁLY
Rovnice tečny:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Rovnice normály:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Určíme derivaci:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x-1}{x-2})^2} \cdot \frac{1 \cdot (x-2) - (x-1) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{1}{\frac{(x-2)^2 + (x-1)^2}{(x-2)^2}} \cdot \frac{x - 2 - x + 1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2 + (x-1)^2} =$$

$$= \frac{-1}{x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1} = \frac{-1}{2x^2 - 6x + 5}$$

hodnota derivace v bodě $x_0 = 1$ je

$$f'(1) = \frac{-1}{2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 5} = -1$$

hodnota funkce v bodě $x_0 = 1$ je

$$f(1) = \arctan \frac{1-1}{1-2} = \arctan 0 = 0$$

Dosazením do vzorce najdeme rovnici tečny a normály:
tečna: $y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = 1 - x$
normála: $y - 0 = -\frac{1}{-1}(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$

c) VODOROVNÁ ASYMPTOTA

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \arctan \frac{x-1}{x-2} = \arctan \left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x-2} \right) =$$

$$\arctan \left(\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(1 - \frac{1}{x})}{x(1 - \frac{2}{x})} \right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Vodorovná asymptota: $y = \frac{\pi}{4}$ pro $x \to \pm\infty$

7 Je dána funkce:

$$f(x) = \arcsin x^2$$

Určete:
a) definiční obor
b) lokální extrémy a intervaly monotonie
c) rovnici tečny a normály v bodě $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

---

a) DEFINIČNÍ OBOR

$$x^2 \in \langle -1, 1 \rangle, \text{ tedy } D(f) = \langle -1, 1 \rangle$$

b) LOKÁLNÍ EXTRÉMY A INTERVALY MONOTONIE

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

$f'(x) = 0$ pro $x = 0$
$f'(x) < 0$ pro $x < 0$, tedy v intervalu $\langle -1, 0 \rangle$ je funkce klesající
$f'(x) > 0$ pro $x > 0$, tedy v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ je funkce rostoucí
lokální minimum má souřadnice $[0, 0]$
lokální maximum je v krajních bodech $D(f)$, tedy v bodech $E_1 \left[-1, \frac{\pi}{2}\right]$ a $E_2 \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

c) ROVNICE TEČNY A NORMÁLY
Rovnice tečny:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Rovnice normály:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

hodnota derivace v bodě $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ je

$$f'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^4}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

hodnota funkce v bodě $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ je

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2})^2}) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Dosazením do vzorce najdeme rovnici tečny a normály:

tečna: $y - \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{\sqrt{2}})$
normála: $y - \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(x - \frac{1}{\sqrt{2}})$

8 Je dána funkce:

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

Určete:
a) definiční obor
b) lokální extrémy a intervaly monotonie
c) inflexní body a intervaly konvexnosti a konkávnosti

---

a) DEFINIČNÍ OBOR

$$x^2 \neq 0 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

b) LOKÁLNÍ EXTRÉMY A INTERVALY MONOTONIE

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x \cdot x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ pokud: $e^x(x-2) = 0$
Protože $e^x > 0$, musí platit $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
Znaménko derivace se mění v bodech:
$x = 2$ (hodnota, pro kterou je nulový čitatel)
$x = 0$ (hodnota, pro kterou je nulový jmenovatel)

v intervalu $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$ je funkce rostoucí ($f'(x) > 0$)
v intervalu $(0, 2)$ je funkce klesající ($f'(x) < 0$)

lokální minimum: $E\left[2, \frac{e^2}{4}\right]$

c) INFLEXNÍ BODY A INTERVALY KONVEXNOSTI A KONKÁVNOSTI

$$f''(x) = \frac{(e^x \cdot (x-2) + e^x \cdot 1) \cdot x^3 - e^x(x-2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{e^x \cdot x^2[(x-1) \cdot x - (x-2) \cdot 3]}{x^6} = \frac{e^x(x^2 - 4x + 6)}{x^4}$$

$f''(x) = 0$ pokud: $e^x(x^2 - 4x + 6) = 0$
Protože $e^x > 0$, musí platit $x^2 - 4x + 6 = 0$. Tento polynom má záporný diskriminant a tedy nemá reálné kořeny.
Znaménko derivace je v celém $D(f)$ kladné, proto:

funkce je v celém $D(f)$ konvexní a nemá inflexní body.

9 Určete definiční obor a Taylorův polynom 3. stupně v bodě $x_0 = 1$ pro funkci

$$f(x) = \ln(2 - x^2)$$

DEFINIČNÍ OBOR

$$2 - x^2 > 0 \Rightarrow 2 > x^2 \Rightarrow D(f) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

TAYLORŮV POLYNOM

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

$$f(x_0) = f(1) = \ln(2 - 1^2) - \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2 - x^2} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{2 - x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2 - 1^2} \cdot (-2 \cdot 1) = \frac{-2}{1} = -2$$

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (2 - x^2) - (-2x) \cdot (-2x)}{(2 - x^2)^2} = \frac{-4 + 2x^2 - 4x^2}{(2 - x^2)^2} = \frac{-4 - 2x^2}{(2 - x^2)^2}$$

$$f''(1) = \frac{-4 - 2 \cdot 1^2}{(2 - 1^2)^2} = \frac{-6}{1} = -6$$

$$f'''(x) = \frac{-4x \cdot (2 - x^2)^2 - (-4 - 2x^2) \cdot 2 \cdot (2 - x^2) \cdot (-2x)}{(2 - x^2)^4}$$

$$f'''(1) = \frac{-4 \cdot 1 \cdot (2 - 1^2)^2 - (-4 - 2 \cdot 1^2) \cdot 2 \cdot (2 - 1^2) \cdot (-2 \cdot 1)}{(2 - 1^2)^4} = \frac{-4 + 6 \cdot (-4)}{1} = -28$$

$$T_3(x) = 0 + \frac{-2 \cdot (x - 1)}{1!} + \frac{-6 \cdot (x - 1)^2}{2!} + \frac{-28 \cdot (x - 1)^3}{3!}$$

Výsledek:

$$T_3(x) = -2 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x - 1)^2 - \frac{14 \cdot (x - 1)^3}{3}$$

10 Určete definiční obor a Maclaurinův polynom 4. stupně pro funkci

$$f(x) = e^{x^2}$$

DEFINIČNÍ OBOR

$$D(f) = \mathbb{R}$$

MACLAURINŮV POLYNOM (Taylorův polynom pro $x_0 = 0$)

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

$$f(x_0) = f(0) = e^{0^2} = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$$
$$f'(0) = e^{0^2} \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

$$f''(x) = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$$
$$f''(0) = 2e^{0^2}(2 \cdot 0^2 + 1) = 2(0 + 1) = 2$$

$$f'''(x) = 2e^{x^2} \cdot 2x \cdot (2x^2 + 1) + 2e^{x^2} \cdot 4x = 2e^{x^2}(4x^3 + 6x)$$
$$f'''(0) = 2e^{0^2}(4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0) = 0$$

$$f^{IV}(x) = 2e^{x^2} \cdot 2x \cdot (4x^3 + 6x) + 2e^{x^2}(12x^2 + 6)$$
$$f^{IV}(0) = 2e^{0^2} \cdot 2 \cdot 0 \cdot (4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0) + 2e^{0^2}(12 \cdot 0^2 + 6) = 0 + 12 = 12$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{0 \cdot x}{1!} + \frac{2 \cdot x^2}{2!} + \frac{0 \cdot x^3}{3!} + \frac{12 \cdot x^4}{4!}$$

Výsledek:

$$T_3(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$$

11 Řešte soustavu rovnic a pomocí Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & 3u & = & 5 \\ 2x & - & y & + & z & - & 2u & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 2z & - & 5u & = & -5 \\ 3x & - & 4y & + & 3z & - & 7u & = & -5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -5 & -5 \\ 3 & -4 & 3 & -7 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & 3 & -8 & -10 \\ 0 & -10 & 6 & -16 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

úpravy:
první řádek vynásobíme číslem −2
a přičteme ke druhému řádku

první řádek vynásobíme číslem −1
a přičteme ke třetímu řádku

první řádek vynásobíme číslem −3
a přičteme ke čtvrtému řádku

úpravy:
druhý řádek vynásobíme číslem −1
a přičteme ke třetímu řádku

druhý řádek vynásobíme číslem −2
a přičteme ke čtvrtému řádku

Zdůvodnění existence a počtu řešení podle Frobeniovy věty:
Pro hodnosti matic platí: $h(A) = h(A_r) = 2$ ... soustava má řešení
Počet neznámých: $n = 4$
Protože: $h(A) = h(A_r) < n$ soustava má nekonečně mnoho řešení, dvě neznámé volíme jako parametry $(n - h(A))$

například: $u = t$ a $z = s$
dopočítáme x a y:

dosazením do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} -5y + 3s - 8t &= -10 \\ 5y &= 3s - 8t + 10 \\ y &= \tfrac{3s-8t+10}{5} \\ y &= \tfrac{3}{5}s - \tfrac{8}{5}t + 2 \end{aligned}$$

dosazením do první rovnice:

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot (\tfrac{3}{5}s - \tfrac{8}{5}t + 2) - s + 3t &= 5 \\ x &= 5 - \tfrac{6}{5}s + \tfrac{16}{5}t - 4 + s - 3t \\ x &= 1 - \tfrac{1}{5}s + \tfrac{1}{5}t \end{aligned}$$

Výsledek:

$$x = 1 - \frac{1}{5}s + \frac{1}{5}t, y = \frac{3}{5}s - \frac{8}{5}t + 2, z = s, u = t, \text{ kde } t, s \in \mathbb{R}$$

12 Určete matice X a Y pro které platí:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = X$$

PRVNÍ ROVNICE:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{zkráceně:} & A \cdot X & = & B \\ \text{vynásobíme inverzní maticí zleva:} & A^{-1} \cdot A \cdot X & = & A^{-1} \cdot B \\ & X & = & A^{-1} \cdot B \end{array}$$

Výpočet inverzní matice A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \sim$$

úprava: první řádek vynásobíme číslem -2 a přičteme ke druhému řádku

úprava: druhý řádek vynásobíme číslem $-\frac{1}{5}$

úprava: druhý řádek vynásobíme číslem -1 a přičteme k prvnímu řádku

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

úprava: první řádek vynásobíme číslem $\frac{1}{2}$

Dopočítáme matici X:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

DRUHÁ ROVNICE:

$$Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = X$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{zkráceně:} & Y \cdot C & = & X \\ \text{vynásobíme inverzní maticí zprava:} & Y \cdot C \cdot C^{-1} & = & X \cdot C^{-1} \\ & Y & = & X \cdot C^{-1} \end{array}$$

Výpočet inverzní matice C^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right) \sim$$

úprava: první řádek vynásobíme číslem -3 a přičteme ke druhému řádku

úprava: druhý řádek vynásobíme číslem$-\frac{1}{13}$

úprava: druhý řádek vynásobíme číslem -3 a přičteme k prvnímu řádku

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{13} & \frac{3}{13} \\ 0 & 1 & \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \end{array}\right) \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Dopočítáme matici Y:

$$Y = X \cdot C^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{65} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

13 Užitím inverzní matice řešte rovnici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{zkráceně:} & A \cdot X & = & B \\ \text{vynásobíme inverzní maticí zleva:} & A^{-1} \cdot A \cdot X & = & A^{-1} \cdot B \\ & X & = & A^{-1} \cdot B \end{array}$$

Výpočet inverzní matice A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

úprava:
třetí řádek vynásobíme číslem -3 a přičteme ke druhému řádku
třetí řádek vynásobíme číslem -1 a přičteme k prvnímu řádku

úprava:
druhý řádek vynásobíme číslem -2 a přičteme k prvnímu řádku

Dopočítáme matici X:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 19 \\ -12 & -10 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

14 Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

VLASTNÍ ČÍSLA:
Řešení rovnice:

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 &= 0 \\ 40 - 8\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4 &= 0 \\ \lambda^2 - 13\lambda + 36 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

Vlastní čísla: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$

VLASTNÍ VEKTORY:
Řešení rovnice:

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

pro vlastní číslo $\lambda_1 = 9$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5-9 & -2 \\ -2 & 8-9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} -4x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x_1 = t, x_2 = -2t$$

Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 9$ je $\begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}$, kde $t \in \mathbb{R}$.

pro vlastní číslo $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5-4 & -2 \\ -2 & 8-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x_2 = s, x_1 = 2s$$

Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 4$ je $\begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix}$, kde $s \in \mathbb{R}$.

15 Určete vlastní čísla matice A a k nejmenšímu vlastnímu číslu určete odpovídající vlastní vektor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

VLASTNÍ ČÍSLA:
Řešení rovnice:

$$|A - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (1-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - 0 - (1-\lambda) - 9(1-\lambda) &= 0 \\ (1-\lambda)[(-2-\lambda)(1-\lambda) - 1 - 9] &= 0 \\ (1-\lambda)(-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-10) &= 0 \\ (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-12) &= 0 \\ (1-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-3) &= 0 \end{aligned}$$

Vlastní čísla: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 3$

VLASTNÍ VEKTORY:
Řešení rovnice:

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{o}$$

pro nejmenší vlastní číslo $\lambda = -4$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1-(-4) & 3 & 0 \\ 3 & -2-(-4) & -1 \\ 0 & -1 & 1-(-4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Upravíme matici:
(první řádek vynásobíme číslem -3, druhý řádek vynásobíme číslem 5 a sečteme)

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} 5x_1 + 3x_2 & = & 0 \\ x_2 - 5x_3 & = & 0 \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{5}x_2 \\ \Rightarrow x_3 = \frac{1}{5}x_2 \end{array} \Rightarrow x_2 = t, x_1 = -\frac{3}{5}t, x_3 = \frac{1}{5}t$$

Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda = -4$ je $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5}t \\ t \\ \frac{1}{5}t \end{pmatrix}$, kde $t \in \mathbb{R}$.

16 Jsou dány body $A[1,2,0]$, $B[-1,1,3]$, $C[1,3,-1]$. Určete:
a) délky stran a obsah trojúhelníku ABC
b) vnitřní úhly v trojúhelníku ABC
c) obecnou rovnici roviny dané body A, B, C

DÉLKY STRAN:
souřadnice vektorů, které určují strany trojúhelníka:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,-1,3),\ \overrightarrow{AC} = C - A = (0,1,-1),\ \overrightarrow{BC} = C - B = (2,2,-4)$$

délky stran jsou délky těchto vektorů:
$a = ||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24}$
$b = ||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
$c = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

OBSAH TROJÚHELNÍKU:

$$S = \frac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(1-3) - \vec{j}\cdot(2-0) + \vec{k}\cdot(-2-0) = (-2,-2,-2)$$

$$S = \frac{||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}\ j^2$$

VNITŘNÍ ÚHLY:

α ... úhel určený vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}||} = \frac{(-2,-1,3)\cdot(0,1,-1)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-2\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 3\cdot(-1)}{\sqrt{28}} = \frac{-4}{\sqrt{28}} = -\frac{2}{\sqrt{7}}$$

β ... úhel určený vektory $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{BA}|| \cdot ||\overrightarrow{BC}||} = \frac{(2,1,-3)\cdot(2,2,-4)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{24}} = \frac{2\cdot 2 + 1\cdot 2 + (-3)\cdot(-4)}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{24}} = \frac{18}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{21}}$$

$$\alpha = \arccos(-\frac{2}{\sqrt{7}}), \beta = \arccos(\frac{9}{2\sqrt{21}}), \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

OBECNÁ ROVNICE ROVINY DANÉ BODY A, B, C

$$ax + by + cz + d = 0$$

normálový vektor $\vec{n} = (a,b,c)$

normálový vektor je kolmý k vektorům $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$, proto platí:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,-2,-2) \sim (1,1,1)$$

dosadíme souřadnice normálového vektoru do obecné rovnice roviny:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z + d &= 0 \\ x + y + z + d &= 0 \end{aligned}$$

V hledané rovině leží daný bod $A[1, 2, 0]$, jeho souřadnice dosadíme do rovnice roviny a určíme konstantu d:

$$1 + 2 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -3$$

Obecná rovnice roviny dané body A, B, C je:

$$x + y + z - 3 = 0$$

17 Jsou dány vektory $\vec{a} = (1, 2, 3)$ a $\vec{b} = (1, 2, 1)$. Určete:
a) vektor $\vec{x}$ délky 5 kolmý k vektorům $\vec{a}$ a $\vec{b}$
b) obsah rovnoběžníku daného vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$

VEKTOR $\vec{x}$:

Směr kolmý k vektorům $\vec{a}$ a $\vec{b}$ určuje jejich vektorový součin.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (2-6) - \vec{j} \cdot (1-3) + \vec{k} \cdot (2-2) = (-4, 2, 0)$$

Vektor $\vec{x}$ bude násobkem vektoru $(-4, 2, 0)$:

$$\vec{x} = k \cdot (-4, 2, 0) = (-4k, 2k, 0)$$

Velikost vektoru $\vec{x}$ má být 5:

$$\begin{aligned} 5 = ||\vec{x}|| &= \sqrt{(-4k)^2 + (2k)^2 + 0^2} \\ 5 &= \sqrt{16k^2 + 4k^2} \\ 5 &= \sqrt{20k^2} \\ 5 &= 2\sqrt{5}k \\ k &= \tfrac{5}{2\sqrt{5}} = \tfrac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\vec{x} = (-4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}, 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}, 0) = (-2\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0)$$

OBSAH ROVNOBĚŽNÍKU:

$$S = ||\vec{a} \times \vec{b}|| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \ \ j^2$$

18 Určete objem a výšku čtyřstěnu $ABCV$. $A[3,5,3]$, $B[-2,11,-5]$, $C[1,-1,4]$, $V[0,6,4]$

OBJEM ČTYŘSTĚNU:

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AV}]|$$

Souřadnice vektorů, které určují čtyřstěn:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-5,6,-8),\ \overrightarrow{AC} = C - A = (-2,-6,1),\ \overrightarrow{AV} = V - A = (-3,1,1)$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AV}] = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\cdot(-6)\cdot 1 + (-2)\cdot 1\cdot(-8) + (-3)\cdot 6\cdot 1 - (-3)\cdot(-6)\cdot(-8) - 1\cdot 1\cdot(-5) - (-2)\cdot 6\cdot 1 = 30 + 16 - 18 + 144 + 5 + 12 = 189$$

$$V = \frac{1}{6}\cdot|189| = 31,5\ \ j^3$$

VÝŠKA ČTYŘSTĚNU:

Objem čtyřstěnu: $V = \frac{1}{3}S\cdot v \Rightarrow$ výška:

$$v = \frac{3V}{S}$$

Obsah podstavy čtyřstěnu (obsah trojúhelníku):

$$S = \frac{||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}||}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(6-48) - \vec{j}\cdot(-5-16) + \vec{k}\cdot(30+12) = (-42,21,42)$$

$$S = \frac{||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}||}{2} = \frac{\sqrt{(-42)^2 + 21^2 + 42^2}}{2} = \frac{\sqrt{3969}}{2} = \frac{63}{2} = 31,5\ \ j^2$$

$$v = \frac{3V}{S} = \frac{3\cdot 31,5}{31,5} = 3\ \ j$$

19 Jsou dány vektory $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (4,1,1)$, $\vec{c} = (2,1,2)$ Určete:
a) objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$
b) obsah podstavy určené vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a výšku nad touto podstavou

---

OBJEM ROVNOBĚŽNOSTĚNU:

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 2 + 12 + 4 - 6 - 1 - 16 = -5$$

$$V = |-5| = 5 \ \ j^3$$

OBSAH PODSTAVY (obsah rovnoběžníku):

$$S = ||\vec{a} \times \vec{b}||$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (2-3) - \vec{j} \cdot (1-12) + \vec{k} \cdot (1-8) = (-1, 11, -7)$$

$$S = ||\vec{a} \times \vec{b}|| = \sqrt{(-1)^2 + 11^2 + (-7)^2} = \sqrt{1 + 121 + 49} = \sqrt{171} \ \ j^2$$

VÝŠKA:

$$v = \frac{V}{S} = \frac{5}{\sqrt{171}} \ \ j$$

20 Určete kolmý průmět bodu M na rovinu α danou body A, B, C a vzdálenost bodu M od roviny α.
$M[6,1,-2]$, $A[1,1,1]$, $B[3,2,1]$, $C[4,1,2]$

OBECNÁ ROVNICE ROVINY α DANÉ BODY A, B, C

$$ax + by + cz + d = 0$$

normálový vektor $\vec{n} = (a, b, c)$

normálový vektor je kolmý k vektorům $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$, proto platí:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,1,0),\ \overrightarrow{AC} = C - A = (3,0,1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (1-0) - \vec{j} \cdot (2-0) + \vec{k} \cdot (0-3) = (1,-2,-3)$$

dosadíme souřadnice normálového vektoru do obecné rovnice roviny:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + (-2) \cdot y + (-3) \cdot z + d &= 0 \\ x - 2y - 3z + d &= 0 \end{aligned}$$

V hledané rovině leží daný bod $A[1,1,1]$, jeho souřadnice dosadíme do rovnice roviny a určíme konstantu d:

$$1 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 4$$

Obecná rovnice roviny dané body A, B, C je: $x - 2y - 3z + 4 = 0$

PŘÍMKA k KOLMÁ K ROVINĚ α BODEM M: $k = M + t \cdot \vec{n}$

$$\begin{aligned} x &= 6 + t \\ y &= 1 - 2t \\ z &= -2 - 3t \end{aligned}$$

KOLMÝ PRŮMĚT BODU M NA ROVINU α je průsečík přímky k s rovinou α.

Souřadnice bodu M dosadíme do rovnice roviny α:

$$\begin{aligned} (6+t) - 2(1-2t) - 3(-2-3t) + 4 &= 0 \\ 6 + t - 2 + 4t + 6 + 9t + 4 &= 0 \\ 14t &= -14 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Hodnotu $t = -1$ dosadíme do parametrického vyjádření přímky k:

$$\begin{aligned} x &= 6 - 1 &&= 5 \\ y &= 1 - 2 \cdot (-1) &&= 3 \\ z &= -2 - 3 \cdot (-1) &&= 1 \end{aligned}$$

Kolmý průmět bodu M na rovinu α je bod $P[5,3,1]$

VZDÁLENOST BODU M OD ROVINY α je délka vektoru $\overrightarrow{PM}$:

$$\overrightarrow{PM} = M - P = (1,-2,-3)$$

$$||\overrightarrow{PM}|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

Vzdálenost bodu M od roviny α je $\sqrt{14}$.

21 Ověřte, že přímky p a q jsou různoběžné a určete jejich průsečík a úhel.

$$p: \begin{array}{rcl} x &=& 2-t \\ y &=& 1-2t \\ z &=& 3-3t \end{array} \qquad q: \begin{array}{rcl} x-y-z-2 &=& 0 \\ 3x-4z-3 &=& 0 \end{array}$$

PRŮSEČÍK:
Parametrické vyjádření přímky p dosadíme do rovnic pro přímku q:

Dosazení do první rovnice:

$$\begin{array}{rcl} (2-t)-(1-2t)-(3-3t)-2 &=& 0 \\ 2-t-1+2t-3+3t-2 &=& 0 \\ 4t &=& 4 \\ t &=& 1 \end{array}$$

Dosazení do druhé rovnice:

$$\begin{array}{rcl} 3(2-t)-4(3-3t)-3 &=& 0 \\ 6-3t-12+12t-3 &=& 0 \\ 9t &=& 9 \\ t &=& 1 \end{array}$$

Dosazením parametrického vyjádření přímky p do obou rovnic pro přímku q vychází stejná hodnota parametru p, proto přímky mají jeden společný bod, tedy jsou různoběžné.
Souřadnice průsečíku R přímek p a q určíme dosazením hodnoty parametru $t=1$ do rovnice přímky p:

$$\begin{array}{rcccr} x &=& 2-1 &=& 1 \\ y &=& 1-2 &=& -1 \\ z &=& 3-3 &=& 0 \end{array} \Rightarrow \textbf{Přímky jsou různoběžné a mají průsečík } P[1,-1,0]$$

ÚHEL PŘÍMEK
určíme jako úhel jejich směrových vektorů

Směrový vektor přímky p (souřadnice jsou konstanty před parametrem t):

$$\overrightarrow{s_p} = (-1,-2,-3)$$

Směrový vektor přímky q (souřadnice určíme jako vektorový součin):
Z první rovnice přímky $q: \overrightarrow{n_\alpha} = (1,-1,-1)$
Z druhé rovnice přímky $q: \overrightarrow{n_\beta} = (3,0,-4)$

$$\overrightarrow{s_q} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(4-0) - \vec{j}\cdot(-4+3) + \vec{k}\cdot(0+3) = (4,1,3)$$

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{s_p}\cdot\overrightarrow{s_q}|}{||\overrightarrow{s_p}||\cdot||\overrightarrow{s_q}||} = \frac{|(-1,-2,-3)\cdot(4,1,3)|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{4^2+1^2+3^2}} =$$

$$= \frac{|-1\cdot4+(-2)\cdot1+(-3)\cdot3|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}} = \frac{|-15|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}} = \frac{15}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}$$

Úhel přímek p a q:

$$\varphi = \arccos\frac{15}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}$$

22 Ověřte, že přímky p a q jsou rovnoběžné a určete jejich vzdálenost.

$$p: \begin{array}{rcr} x &=& 2+3t \\ y &=& -1+4t \\ z &=& 2t \end{array} \qquad q: \begin{array}{rcl} x &=& 7+3s \\ y &=& 1+4s \\ z &=& 3+2s \end{array}$$

Z parametrického vyjádření přímek:

Směrový vektor přímky p : $\overrightarrow{s_p} = (3,4,2)$
Bod na přímce p : $P[2,-1,0]$

Směrový vektor přímky q : $\overrightarrow{s_q} = (3,4,2)$
Bod na přímce q : $Q[7,1,3]$

$\overrightarrow{s_p} = \overrightarrow{s_q}$ $\Rightarrow$ **Přímky p a q jsou rovnoběžné.**

VZDÁLENOST ROVNOBĚŽEK

určíme jako výšku rovnoběžníku daného vektory $\overrightarrow{s_p}$ a $\overrightarrow{PQ}$, kde P je bod na přímce p a Q je bod na přímce q, $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (5,2,3)$

výška rovnoběžníku :

$$v = \frac{S}{||\overrightarrow{s_p}||} = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{s_p}||}{||\overrightarrow{s_p}||}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{s_p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (4-12) - \vec{j} \cdot (10-9) + \vec{k} \cdot (20-6) = (-8,-1,14)$$

$$v = \frac{||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{s_p}||}{||\overrightarrow{s_p}||} = \frac{\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+14^2}}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}} = \frac{\sqrt{261}}{\sqrt{29}} = \sqrt{9} = 3$$

Vzdálenost rovnoběžek p a q je 3 *j*.

23 Ověřte, že přímky p a q jsou mimoběžné a určete jejich vzdálenost.

$$p: \begin{array}{rcl} x &=& t-1 \\ y &=& t \\ z &=& 2t+1 \end{array} \qquad q: \begin{array}{rcl} x &=& s \\ y &=& 3s-1 \\ z &=& 4s+2 \end{array}$$

Z parametrického vyjádření přímek:

Směrový vektor přímky p : $\overrightarrow{s_p} = (1,1,2)$
Bod na přímce p : $P[-1,0,1]$

Směrový vektor přímky q : $\overrightarrow{s_q} = (1,3,4)$
Bod na přímce q : $Q[0,-1,2]$

$\overrightarrow{s_p} \neq \overrightarrow{s_q} \;\Rightarrow$ **Přímky p a q nejsou rovnoběžné, mohou být různoběžné nebo mimoběžné.**

VZDÁLENOST MIMOBĚŽEK

určíme jako výšku rovnoběžnostěnu daného vektory $\overrightarrow{s_p}$, $\overrightarrow{s_q}$ a $\overrightarrow{PQ}$, kde P je bod na přímce p a Q je bod na přímce q.
$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,-1,1)$
(pokud by výška vyšla nulová, přímky jsou různoběžky).

výška rovnoběžnostěnu :

$$v = \frac{V}{S} = \frac{|[\overrightarrow{s_p}, \overrightarrow{s_q}, \overrightarrow{PQ}]|}{||\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q}||}$$

$$[\overrightarrow{s_p}, \overrightarrow{s_q}, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) = 3 + 4 - 2 - 6 - 1 + 4 = 2$$

$$\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot (4-6) - \vec{j} \cdot (4-2) + \vec{k} \cdot (3-1) = (-2,-2,2)$$

$$v = \frac{|[\overrightarrow{s_p}, \overrightarrow{s_q}, \overrightarrow{PQ}]|}{||\overrightarrow{s_p} \times \overrightarrow{s_q}||} = \frac{2}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Přímky jsou mimoběžné. Vzdálenost mimoběžek p a q je $\frac{1}{\sqrt{3}}$ *j*.