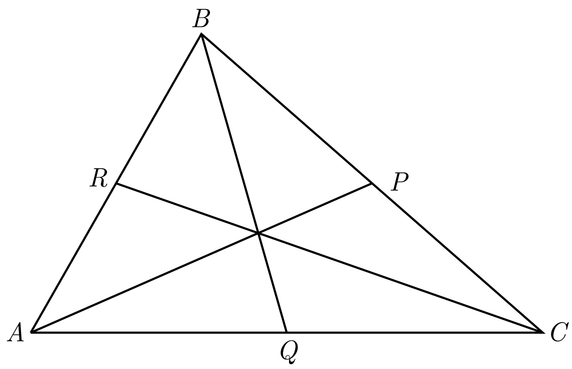
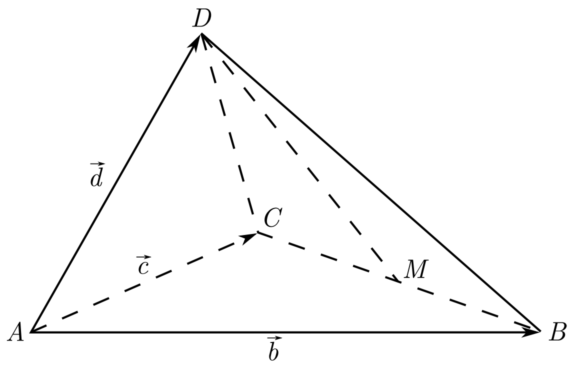
BAA008 – Matematika I (G)

„Chci se zdokonalit“

T.1.1. V trojúhelníku ABC je $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, vyjádřete těžnice $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{CR}$ trojúhelníka ABC pomocí vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a vypočtěte vektory $\vec{a} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR}$, $\vec{b} = 3\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{CR}$.



T.1.2. Ve čtyřstěnu $ABCD$ jsou dány hrany vycházející z vrcholu A a to $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Užitím vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ vyjádřete ostatní hrany čtyřstěnu a vektor $\overrightarrow{DM}$, kde M je půlící bod hrany BC.



T.1.3. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jsou nekomplanární. Pro jaká reálná čísla m, n jsou kolineární vektory $\vec{a} = (\frac{2}{m} - 4)\vec{u} + n\vec{v} + 5\vec{w}$, $\vec{b} = m\vec{u} + (3m - 2n)\vec{v} + 2\vec{w}$.

T.2.1. Určete skalární součin vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, je-li $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ když

(a) $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$

(b) $\varphi = \dfrac{3}{4}\pi$

(c) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

(d) $\varphi = 0$

(e) $\varphi = \pi$

T.2.2. Najděte úhel φ vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, je-li $\vec{u} = \vec{a}+\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a}-\vec{b}$, $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 1$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$.

T.2.3. Určete jednotkový vektor $\vec{t}^o$, je-li $\vec{t} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, kde $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{c}\| = 4$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{a},\vec{c}) = \pi$, $\angle(\vec{b},\vec{c}) = \dfrac{2}{3}\pi$.

T.2.4. Jsou dány vektory $\vec{u} = \vec{a} - 5\vec{b} - 3\alpha\vec{c}$, $\vec{v} = \vec{a} - \alpha\vec{b} + \vec{c}$, přičemž $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{c}\| = 1$, vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jsou vzájemně kolmé. Určete parametr α tak, aby byly kolmé i vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

T.3.1. Zjednodušte výraz $V = (\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + 3\vec{c}) \times (3\vec{a} - \vec{b})$.

T.3.2. Dokažte, že pro libovolné vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ platí: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{o}$.

T.3.3. Jdou dány vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, pro které platí $\|\vec{u}\| = 10$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$. Vypočtěte $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

T.3.4. Vypočtěte $A = [(2\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + 2\vec{v})]^2$, jestliže je $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\angle(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{2}{3}\pi$.

T.3.5. Jsou dány nekomplanární vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, pro které platí $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{c}\| = 2$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 90°$, $\angle(\vec{a},\vec{c}) = \angle(\vec{b},\vec{c}) = 60°$. Vypočtěte obsah P rovnoběžníka sestrojeného z vektorů $\vec{u} = -\vec{a} + 2\vec{c}$, $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

T.4.1. Vypočtěte $[\ \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ ]$, je-li $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 4$, $\|\vec{c}\| = 2$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \angle(\vec{a},\vec{c}) = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{b},\vec{c}) = \dfrac{5}{6}\pi$.

T.4.2. Určete objem čtyřstěnu sestrojeného z vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, je-li $\|\vec{a}\| = 7$, $\|\vec{b}\| = 2$, $\|\vec{c}\| = 5$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle(\vec{a},\vec{c}) = \angle(\vec{b},\vec{c}) = \dfrac{\pi}{2}$.

T.4.3. Dokažtě, že platí $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})) = [\ \vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ ]$.

T.4.4. Vypočtěte $V = [\ \vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}\ ]$, kde $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{b} + 2\vec{c}$, $\vec{w} = \vec{a} - \vec{c}$.

Mgr. et Mgr. Jan Šafařík, Ph.D.