Příklad 2.1.1. Vypočtěte inverzní matici k matici A (metodou elementárních řádkových úprav) a ověřte správnost výsledku, jestliže:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|E) \sim \text{EŘÚ} \sim (E|A^{-1})$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} -4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} -4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{matrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ \cdot\left(-\frac{1}{4}\right) \\ \sim \\ \cdot\left(\frac{1}{4}\right) \end{matrix} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}A$$

Příklad 2.1.2. Užitím inverzní matice určete matici X, pro kterou platí

$$X \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{B}.$$

1. Osamostatníme neznámou matici X.
2. Matici X vypočítáme

$$XA = B \quad / \cdot A_P^{-1}$$

$$X \underbrace{A A^{-1}}_{E} = B A^{-1}$$

$$X = B A^{-1}$$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -2 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

E | A^{-1}

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \text{DÚ} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

P_2 a) $2X + A - B = X - 2C \quad / -X$ $\qquad A = \ldots \quad B = \ldots$

$X + A - B = -2C \quad / -A$

$X - B = -A - 2C \quad / +B$

$$\underline{X = B - A - 2C}$$

b) $A^2X + B = C \quad / -B$

$A^2X = C - B \quad / \cdot (A^2)^{-1}_L$

$\underbrace{(A^2)^{-1}A^2}_{E}X = (A^2)^{-1}(C-B)$

$$\underline{\underline{X = (A^2)^{-1}(C-B)}}$$

c) $AXB = C \quad / \cdot A^{-1}_L$

$\underbrace{A^{-1}A}_{E} X B = A^{-1}C \quad / \cdot B^{-1}_P$

$X \cdot \underbrace{BB^{-1}}_{E} = A^{-1}CB^{-1}$

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

Příklad 2.1.3. Zjistěte, zda existují taková čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$, že matice A je ortogonální, jestliže:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ x & y & z \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot A^T = E$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & x \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & y \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = 0 \qquad 2x - 2y + z = 0 \qquad \Rightarrow z = 2y - 2x = 2(y - x)$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \qquad 2x + y - 2z = 0 \qquad \Rightarrow \quad 2x + y - 4y + 4x = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 + 4(y-x)^2 = 1$$

$$6x - 3y = 0$$

$$2x = y$$

$$x^2 + 4x^2 + 4(2x - x)^2 = 1$$

$$9x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \qquad y_1 = \frac{2}{3} \qquad z_1 = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} \qquad y_2 = -\frac{2}{3} \qquad z_2 = -\frac{2}{3}$$

Příklad 2.2.1. Vypočtěte determinant

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

i) Sarrusovým pravidlem,

ii) rozvojem podle 2. sloupce,

iii) užitím elementárních úprav.

$$i)\quad \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 5 & 8 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 7 & 6 & 1 \end{array}\right| = 0 + 90 - 8 - 0 - 6 + 35 = 111$$

$$ii) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \underbrace{0(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}}_{=0} + 3(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 1(35-8) - 3(2-30) =$$

$$= 111$$

$$iii)\quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \\ -3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 14 \\ 0 & -14 & -17 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{matrix} \\ 14 \\ 5 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 111 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 2 \cdot 5 \cdot 111 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = 111$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 5 \end{vmatrix}\begin{array}{l} -1 \; -3 \\ \\ + \\ 2 \end{array} = \overset{\text{LR}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -10 & -3 \\ 0 & 9 & -5 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1)^2}_{1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -1 & -10 & -3 \\ 9 & -5 & 1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} 3 \; -1 \\ + \\ + \end{array} = \overset{\text{LR}}{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 0 \\ 4 & -9 & 0 \end{vmatrix}} = \underbrace{1(-1)^4}_{1} \cdot \begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} + 0 \ldots + 0 \ldots$$

$$= 14 \cdot (-9) - 2 \cdot 4 = \underline{\underline{-134}}$$

Příklad 2.2.2. Bez přímého výpočtu dokažte, že platí:

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{matrix} x & & & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & x \\ 1 & 2 & b & x \\ 1 & 3 & c & x \\ 1 & 4 & d & x \end{vmatrix} \end{array}}_{=0} + \underbrace{\begin{array}{c} \begin{matrix} & & 2 & \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2a & 1 & a & x \\ 2b & 2 & b & x \\ 2c & 3 & c & x \\ 2d & 4 & d & x \end{vmatrix} \end{array}}_{=0} = 0$$

Příklad 2.2.3. Bez přímého výpočtu dokažte, že platí:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

SUBSTITUCE: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} c \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$|\vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}| = |\vec{b}, \vec{c}+\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}| + |\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}| = |\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}+\vec{b}| + |\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}+\vec{b}| +$$

$$+ \underbrace{|\vec{c}, \vec{c}, \vec{a}+\vec{b}|}_{\Rightarrow = 0} + |\vec{c}, \vec{a}, \vec{a}+\vec{b}| = |\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}| + \underbrace{|\vec{b}, \vec{c}, \vec{b}|}_{\Rightarrow = 0} + \underbrace{|\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}|}_{\Rightarrow = 0} + \underbrace{|\vec{b}, \vec{a}, \vec{b}|}_{\Rightarrow = 0} + \underbrace{|\vec{c}, \vec{a}, \vec{a}|}_{\Rightarrow = 0} +$$

$$+ |\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| + |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = 2 |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}|$$

Příklad 2.2.5. Užitím adjungované matice vypočítěte inverzní matici, kterou potřebujeme pro řešení **Příkladu 2.1.2**.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj} A$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{adj} A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$