7.1 Skalární součin geometrických vektorů ve $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$.

1. Určete skalární součin $\underbrace{(2\vec{a} - 3\vec{b})}_{\vec{u}} \cdot \underbrace{(2\vec{b} - \vec{a})}_{\vec{v}}$, jestliže $||\vec{a}|| = 5, ||\vec{b}|| = 4$ a úhel $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ je $\pi/3$.

$$(2\vec{a} - 3\vec{b})\cdot(2\vec{b} - \vec{a}) = 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}^2 - 6\vec{b}^2 + 3\vec{b}\cdot\vec{a} = 7\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{a} - 6\vec{b}\cdot\vec{b} =$$

$$= 7\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) - 2\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{a}\|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{a}) - 6\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{b},\vec{b}) =$$

$$= 7\cdot 5\cdot 4\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}} - 2\cdot 5\cdot 5\cdot\underbrace{\cos 0}_{1} - 6\cdot 4\cdot 4\cdot\underbrace{\cos 0}_{1} = 70 - 50 - 96 = \underline{\underline{-76}}$$

7.1. 3. Určete $||\vec{a}-\vec{b}||$, jestliže $||\vec{a}|| = 13, ||\vec{b}|| = 19, ||\vec{a}+\vec{b}|| = 24$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

$\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) + \|\vec{b}\|^2}$

$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \underline{2\vec{a}.\vec{b}} + \|\vec{b}\|^2 \implies 2\cdot\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|b\|^2$

$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$

$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \|\vec{a}\| - 2\vec{a}.\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - (\|\vec{a}+\vec{b}\| - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2) + \|\vec{b}\|^2 =$

$= 2\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}+\vec{b}\| + 2\|\vec{b}\|^2 = 2\cdot 13^2 - 24 + 2\cdot 19^2 = 22^2$

$\underline{\underline{\|\vec{a}-\vec{b}\| = 22}}$

7.1 5. Pro jaké číslo $n \in \mathbb{R}$ jsou vektory $\vec{x} = (n-4)\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + (n+2)\vec{c}$, $\vec{y} = -4\vec{a} - 2n\vec{b} + \vec{c}$ kolmé, jestliže $||\vec{a}|| = 1$, $||\vec{b}|| = 2$, $||\vec{c}|| = 2$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \angle(\vec{b},\vec{c}) = \angle(\vec{a},\vec{c}) = 60°$?

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ||\vec{a}||\cdot||\vec{b}|| \cos \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \left((m-4)\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + (m+2)\vec{c}\right)\cdot\left(-4\vec{a} - 2m\vec{b} + \vec{c}\right) = (m-4)(-4)\vec{a}\cdot\vec{a} + (m-4)(-2m)\vec{a}\cdot\vec{b} + (m-4)\vec{a}\cdot\vec{c} +$$

$$+ \frac{3}{2}(-4)\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{3}{2}(-2m)\vec{b}\cdot\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{b}\cdot\vec{c} + (m+2)(-4)\vec{a}\cdot\vec{c} + (m+2)(-2m)\vec{b}\cdot\vec{c} + (m+2)\vec{c}\cdot\vec{c} =$$

$$= (-4m+16)\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{a}}_{1\cdot 1=1} + (-2m^2+8m-6)\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=1} + (-3m-12)\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{c}}_{1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=1} + (-2m^2-4m+\frac{3}{2})\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{c}}_{2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=2} + (-3m)\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{b}}_{2\cdot 2=4} +$$

$$+ (m+2)\underbrace{\vec{c}\cdot\vec{c}}_{2\cdot 2=4} = -6m^2 - 15m + 9 = 0 \Rightarrow 2m^2 + 5m - 3 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2} = \frac{-5 \pm \overset{7}{\sqrt{49}}}{4} \begin{cases} -3 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

7.1. 6. Vypočtěte úhel vektorů $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}, \vec{b} = -3\vec{m} + 2\vec{n}$, kde $\vec{m}, \vec{n}$ jsou jednotkové vektory, svírající úhel $\alpha = 60°$. Načrtněte obrázek.

$\|\vec{m}\| = \|\vec{n}\| = 1$, $\measuredangle(\vec{m}, \vec{n}) = 60°$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi$

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$

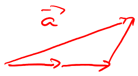
$\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (2\vec{m} + \vec{n})^2 = 4\vec{m}^2 + 4\vec{m} \cdot \vec{n} + \vec{n}^2 = 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \frac{1}{2} + 1 = 7 \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{7}$

$\|\vec{b}\| = \vec{b} \cdot \vec{b} = (-3\vec{m} + 2\vec{n})^2 = 9\vec{m}^2 - 12\vec{m} \cdot \vec{n} + 4\vec{n}^2 = 9 \cdot 1 - 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1 = 7 \Rightarrow \|\vec{b}\| = \sqrt{7}$

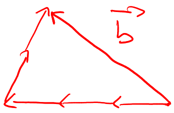
$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{m} + \vec{n})(-3\vec{m} + 2\vec{n}) = -6\vec{m}^2 + 4\vec{m} \cdot \vec{n} - 3\vec{m} \cdot \vec{n} + 2\vec{n}^2 = -6 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 = -\frac{7}{2}$

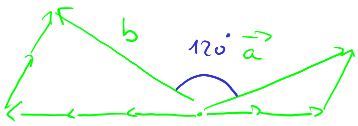
$\cos\varphi = \dfrac{-\frac{7}{2}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 120°}}$

$\vec{a}$:



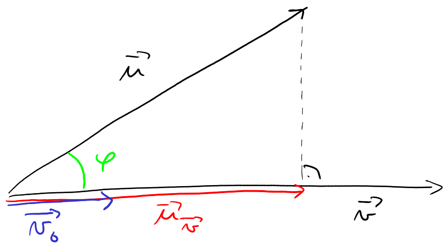
$\vec{b}$:





7.1. 7. Určete projekci vektoru $\vec{u} = 10\vec{a} + 2\vec{b}$ do vektoru $\vec{v} = 5\vec{a} - 12\vec{b}$, kde $\vec{a}, \vec{b}$ jsou jednotkové, k sobě kolmé vektory.

ostrý ∡ :



$\vec{u}_{\vec{v}}$ ... ortogonální projekce vektoru $\vec{u}$ do $\vec{v}$

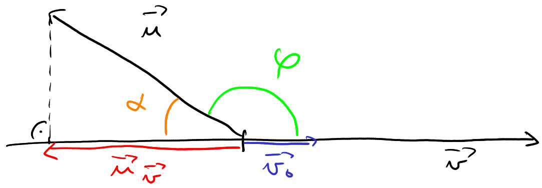
$$\vec{u}_{\vec{v}} = \|\vec{u}_{\vec{v}}\| \cdot \vec{v}_0$$

$$\cos\varphi = \frac{\|\vec{u}_{\vec{v}}\|}{\|\vec{u}\|} \Rightarrow \|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \|\vec{u}\| \cos\varphi$$

$$v_0 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \|\vec{u}_{\vec{v}}\| \cdot \vec{v}_0 = \underbrace{\|\vec{u}\| \cos\varphi \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}} = \cancel{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{\cancel{\|\vec{u}\|} \cdot \|\vec{v}\|} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$$

tupý ∡ :



$$\varphi = \pi - \alpha$$

$$\cos\varphi = \cos(\overset{a}{\pi} - \overset{b}{\alpha}) = \underset{-1}{\cos\pi} \cos\alpha + \underset{0}{\sin\pi} \sin\alpha = -\cos\alpha$$

$[\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b]$

$$\cos\alpha = \frac{\|\vec{u}_{\vec{v}}\|}{\|\vec{u}\|} \; ; \quad \vec{u}_{\vec{v}} = \|\vec{u}_{\vec{v}}\| \cdot (-\vec{v}_0)$$

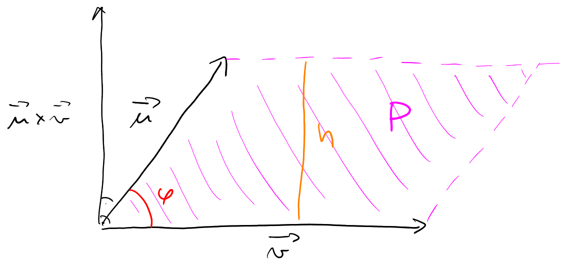
$$\vec{u}_{\vec{v}} = \|\vec{u}_{\vec{v}}\| (-\vec{v}_0) = -\|\vec{u}\| \cdot \underset{-\cos\varphi}{\cos\alpha} \cdot \vec{v}_0 = \underbrace{\|\vec{u}\| \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}$$

... stejné jako pro ostrý úhel!

$$\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v} = \frac{(10\vec{a} + 2\vec{b})(5\vec{a} - 12\vec{b})}{\|5\vec{a} - 12\vec{b}\|^2} \cdot (5\vec{a} - 12\vec{b}) = \underset{\text{DÚ}}{\dots\dots} = \frac{2}{13}(5\vec{a} - 12\vec{b})$$

7.2 Vektorový součin geometrických vektorů ve $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$

1. Vypočtete normu vektoru $(3\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}-4\vec{b})$, jestliže $\|\vec{a}\|=1$, $\|\vec{b}\|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=5\pi/6$. Načrtněte obrázek a vysvětlete úlohu geometricky.



$\|\vec u \times \vec v\| = \|\vec u\|\cdot\|\vec v\|\sin\varphi = P_{\square}$

$\vec a \times \vec b$

$\vec b \times \vec a = -\vec a \times \vec b$

$P = \|\vec v\|\cdot h$

NE! $\vec u \times \vec v = \|\vec u\|\|\vec v\|\cdot\sin\varphi$ vektor $\neq$ číslo

$$(3\vec a - 2\vec b)\times(\vec a - 4\vec b) = \underbrace{\cancel{3\vec a\times\vec a}}_{\vec o} + 3\vec a\times(-4\vec b) + \underbrace{(-2\vec b)\times\vec a}_{+2\vec a\times\vec b} + \underbrace{\cancel{(-2\vec b)\times(-4\vec b)}}_{\vec o} =$$

$$= -10(\vec a\times\vec b)$$

$$\|-10\cdot(\vec a\times\vec b)\| = 10\cdot\|\vec a\|\cdot\|\vec b\|\sin\tfrac{5}{6}\pi = 10\cdot 1\cdot 3\cdot\tfrac{1}{2} = \underline{\underline{15}}$$

7.2. 2. Zjednodušte výraz $\vec{i} \times (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})+(\vec{j}+\vec{k})\times(\vec{i}-2\vec{j})$, kde $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tvoří pravotočivou ortonormální soustavu vektorů.

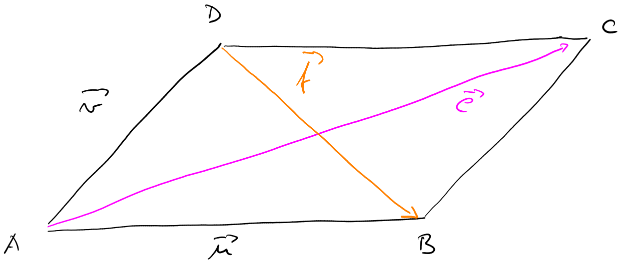
$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$; $\sphericalangle(\vec{i},\vec{j}) = \sphericalangle(\vec{i},\vec{k}) = \sphericalangle(\vec{j},\vec{k}) = 90^\circ$

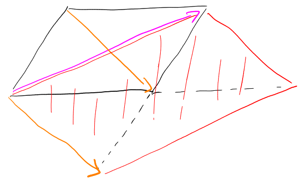
$$\vec{i} \times (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) + (\vec{j}+\vec{k}) \times (\vec{i}-2\vec{j}) = \underbrace{\vec{i}\times\vec{i}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{i}\times\vec{j} + \overbrace{\vec{j}\times\vec{i}}^{-\vec{i}\times\vec{j}}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{i}\times\vec{k} + \overbrace{\vec{k}\times\vec{i}}^{-\vec{i}\times\vec{k}}}_{=\vec{0}} - 2\underbrace{\vec{j}\times\vec{j}}_{\vec{0}} -$$

$$-2\vec{k}\times\vec{j} = -2\underbrace{\vec{k}\times\vec{j}}_{\underbrace{-\vec{j}\times\vec{k}}_{-\vec{i}}} = \underline{\underline{2\vec{i}}}$$

7.2.3. Dvěma různými metodami vypočtěte obsah rovnoběžníka $ABCD$ jehož úhlopříčky jsou $\overrightarrow{AC}= 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{DB}= 4\vec{a} - 5\vec{b}$, kde $\vec{a},\vec{b}$ jsou jednotkové vektory, svírající úhel 45°.

$\|\vec a\| = \|\vec b\| = 1$; $\sphericalangle(\vec a,\vec b) = 45°$





I) a) $P = \|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\| = \|(\frac12\overrightarrow{AC}+\frac12\overrightarrow{DB})\times(\frac12\overrightarrow{AC}-\frac12\overrightarrow{DB})\| = \frac14\|(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB})\times(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB})\| =$

$= \frac14\|((2\vec a-\vec b)+(4\vec a-5\vec b))\times((2\vec a-\vec b)-(4\vec a-5\vec b))\| = \frac14\|(6\vec a-6\vec b)\times(-2\vec a+4\vec b)\| =$

$= \frac14\cdot 6\cdot 2\,\|(\vec a-\vec b)\times(\vec a-2\vec b)\| = 3\cdot\|\underbrace{\vec a\times\vec a}_{\vec o} - 2\vec a\times\vec b - \underbrace{\vec b\times\vec a}_{-\vec a\times\vec b} + 2\underbrace{\vec b\times\vec b}_{\vec o}\| =$

$= 3\cdot\|-\vec a\times\vec b\| = 3\cdot\|\vec a\times\vec b\| = 3\cdot\|\vec a\|\cdot\|\vec b\|\cdot\sin\varphi = 3\cdot1\cdot1\cdot\frac{\sqrt2}{2} = \frac{3\sqrt2}{2}$

b) $P = \frac12\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{DB}\| = \frac12\|(2\vec a-\vec b)\times(4\vec a-5\vec b)\| = \dots\dots = \frac{3\sqrt2}{2}$

II $\vec u = \frac12(\vec e+\vec f) = 3\vec a-3\vec b$

$\vec v = \frac12(\vec e-\vec f) = -\vec a+2\vec b$

$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1 \Rightarrow \sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$

$\|\vec u\times\vec v\|^2 = \|\vec u\|^2\cdot\|\vec v\|^2\cdot\sin^2\varphi = \|\vec u\|^2\cdot\|\vec v\|^2(1-\cos^2\varphi) = \|\vec u\|^2\cdot\|\vec v\|^2\left(1-\frac{(\vec u\cdot\vec v)^2}{\|\vec u\|^2\cdot\|\vec v\|^2}\right) =$

$= \|\vec u\|^2\cdot\|\vec v\|^2 - (\vec u\cdot\vec v)^2$

$$\boxed{\|\vec u\times\vec v\| = \sqrt{\|\vec u\|^2\cdot\|\vec v\|^2-(\vec u\cdot\vec v)^2}}$$

$\|\vec u\|^2 = \vec u\cdot\vec u = (3\vec a-3\vec b)(3\vec a-3\vec b) = 9\vec a^2 - 18\vec a\cdot\vec b + 9\vec b^2 = 9\cdot1\cdot1 - 18\cdot1\cdot1\cdot\frac{\sqrt2}{2} + 9\cdot1\cdot1 = 18-9\sqrt2$

$\|\vec v\|^2 = \vec v\cdot\vec v = (-\vec a+2\vec b)(-\vec a+2\vec b) = \vec a^2 - 4\vec a\cdot\vec b + 4\vec b^2 = 1\cdot1 - 4\cdot1\cdot1\,\frac{\sqrt2}{2}+4\cdot1\cdot1 = 5-2\sqrt2$

$\vec u\cdot\vec v = (3\vec a-3\vec b)(-\vec a+2\vec b) = -3\vec a^2+9\vec a\cdot\vec b-6\vec b^2 = -3\cdot1\cdot1+9\cdot1\cdot1\cdot\frac{\sqrt2}{2}-6\cdot1\cdot1 = -9+9\frac{\sqrt2}{2}$

$\|\vec u\times\vec v\| = \sqrt{(18-9\sqrt2)(5-2\sqrt2)-\left(-9+9\frac{\sqrt2}{2}\right)^2} = \dots\dots = \sqrt{\frac{9\cdot2}{4}} = \frac{3\sqrt2}{2}$

DÚ

7.3 Smíšený součin geometrických vektorů ve $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$

1. Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ svírají úhel $\varphi = \pi/6$ a vektor $\vec{w}$ je kolmý k vektorům $\vec{u}, \vec{v}$. Vypočtěte smíšený součin $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, je-li $||\vec{u}|| = 6, ||\vec{v}|| = 3, ||\vec{w}|| = 3$.

$\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6} \quad \sphericalangle(\vec{w}, \vec{u}) = \sphericalangle(\vec{w}, \vec{v}) = 90°$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) =$$

$$= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) =$$

↳ není jednoznačně určen

$$= 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \begin{cases} \underbrace{\cos 0°}_{1} \\ \underbrace{\cos \pi}_{-1} \end{cases} = \begin{cases} 27 \\ -27 \end{cases}$$