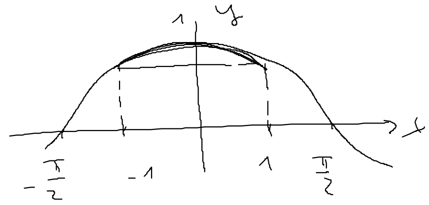
8. Reálná funkce jedné proměnné, explicitní a parametrické zadání funkce. Základní vlastnosti funkcí. Složená a inverzní funkce. Elementární funkce.

Příklady 8.1. Určete definiční obory nasledujících funkcí:

3. $f:\ y = \underbrace{\sqrt{\cos(\sin x)}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\arcsin \frac{1+x^2}{2x}}_{\mathrm{II}}.$

I.) $\cos(\sin x) \geq 0$ — sin zobrazí $\mathbb{R}$ do intervalu $\langle -1, 1\rangle$

$\Rightarrow$ je def. v $\mathbb{R}$



II) $-1 \leq \frac{1+x^2}{2x} \leq 1$

a) $x > 0 \Rightarrow$ $-2x \leq 1+x^2 \leq 2x$

$0 \leq x^2+2x+1 \quad \wedge \quad x^2-2x+1 \leq 0$

$0 \leq (x+1)^2 \quad \wedge \quad (x-1)^2 \leq 0$

$x \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad x=1 \qquad \Longrightarrow x = 1$

b) $x < 0$ $\quad -2x \geq 1+x^2 \geq 2x$

$0 \geq x^2+2x+1 \quad \wedge \quad x^2-2x+1 \geq 0$

$0 \geq (x+1)^2 \quad \wedge \quad (x-1)^2 \geq 0$

$x = -1 \quad \wedge \quad x \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow x = -1$

$D(f) = \mathbb{R} \cap \{1,-1\} = \underline{\underline{\{1,-1\}}}$

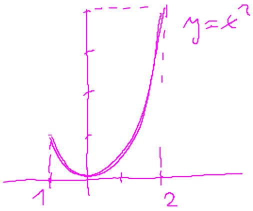
8.2. **2.** Zjistěte, zda uvedené funkce jsou sudé nebo liché, jestliže:

a) $f:\ y = \log \dfrac{2-x}{2+x}$.

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ SUDÁ, SOUMĚRNÁ VZHLEDEM K OSE y

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ LICHÁ, SOUMĚRNÁ VZHLEDEM K POČÁTKU

DEFINIČNÍ OBOR MUSÍ BÝT SYMETRICKÝ K POČÁTKU



- není sudá

i) $D(f):\ \dfrac{2-x}{2+x} > 0$ $\quad$ $-\quad +\quad -$; -2, 2 $\Rightarrow D(f) = (-2, 2)$ $\quad$ D(f) je symetrická vzhledem k počátku

ii) $f(-x) = \log \dfrac{2+x}{2-x} = \log \left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{-1} = -\log \dfrac{2-x}{2+x} = -f(x) \Rightarrow$ fce je lichá

Příklady 8.3.

1. Určete f^{-1} k funkci $f|M = g$, kde M je největší podmnožina $D(f)$ taková, že existuje f^{-1}, jestliže:

c) $f:\ y = 3 + 4\arccos(2x - 1)$.

Inverzní fce musí být prostá: $[x,y] \in f \Leftrightarrow [y,x] \in f^{-1}$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

i) $D(f)$

$$-1 \leq 2x-1 \leq 1$$
$$0 \leq 2x \leq 2$$
$$0 \leq x \leq 1$$

$D(f) = \langle 0, 1 \rangle$

ii)

$f(f^{-1}(x)) = x$

$f^{-1}(f(x)) = x$

$$y = 3 + 4\arccos(2x-1)$$
$$y - 3 = 4\arccos(2x-1)$$
$$\frac{y-3}{4} = \arccos(2x-1) \quad /\cos$$
$$\cos\left(\frac{y-3}{4}\right) = 2x-1$$
$$1 + \cos\left(\frac{y-3}{4}\right) = 2x$$
$$\frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{y-3}{4}\right)\right) = x \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}:\ y = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{x-3}{4}\right)$$

iii) $D(f^{-1})$ POZOR! – NELZE FORMÁLNĚ POČÍTAT $D(f^{-1})$ Z FUNKČNÍHO PŘEDPISU

$D(f) = H(f^{-1})$

$D(f^{-1}) = H(f)$

$D(f) = \langle 0, 1 \rangle$ $\quad f(0) = 3 + 4\arccos(2\cdot 0 - 1) = 3 + 4\pi$

$f(1) = 3 + 4\arccos(1) = 3$

$f: \langle 0, 1 \rangle \longrightarrow \langle 3, 3+4\pi \rangle$

$f^{-1}: \langle 3, 3+4\pi \rangle \longrightarrow \langle 0, 1 \rangle$

$D(f^{-1}) = \langle 3, 3+4\pi \rangle$

Příklady 8.2.

4. Určete základní periody (existují-li) funkcí:

a) $f:\ y = 2^{3+2\sin x}$.
Výsledek: 2π

b) $g:\ y = 1 + 3\cos\frac{x}{4} - \sin\left(1 + \frac{x}{2}\right)$.

VIZ 8.2.3 - TVRZENÍ: MÁ-LI FCE $f: y = f(x)$ PERIODU $T > 0$, PAK FUNKCE $g: y = f(ax+b)$, KDE $a > 0$ MÁ PERIODU $\frac{T}{a}$

ODVOZENÍ: $g\left(x+\frac{T}{a}\right) = f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right) = f(ax+T+b) = f(ax+b) = g(x)$

$$y = 1 + 3\cos\frac{x}{4} - \sin\underbrace{\left(1+\frac{x}{2}\right)}_{}\ \left(\frac{1}{2}x+1\right)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \implies \text{perioda } \underline{\underline{8\pi}}$$

Příklad 9.1. Rozložte zadané reálné polynomy v reálném oboru (jako součin tzv. ireducibilních polynomů):

9. $f : y = 2x^2 - x - 1$
10. $f : y = x^7 + x^4$
11. $f : y = x^5 + x^4 - x - 1$
12. $f : y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$
13. $f : y = x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 - x + 6$
14. $f : y = x^7 + 2x^6 - x - 2$
15. $f : y = 2x^4 - 7x^2 - 4$
16. $f : y = 3x^4 + 2x^3 - 28x^2 - 18x + 9$
17. $f : y = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1$
18. $f : y = x^4 + x^2 + 1$
19. $f : y = x^3 + 6x^2 - x - 30$
20. $f : y = x^6 - 2x^4 - 4x^2 + 8$
21. $f : y = x^5 - x^4 - 15x^3 + 5x^2 + 34x - 24$
22. $f : y = 4x^4 + 3x^2 + 1$

10) $y = x^7 + x^4 = x^4(x^3+1) = x^4(x+1)(x^2-x+1)$

$x_{1,2,3,4} = 0, \quad x_5 = -1, \quad x_{6,7} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

11) $y = x^5 + x^4 - x - 1 = x^4(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^4-1) = (x+1)(x^2+1)(x^2-1) =$

$= (x+1)(x^2+1)(x-1)(x+1) = (x+1)^2(x-1)(x^2+1)$

$x_{1,2} = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = i, \quad x_5 = -i$

12) $y = x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x^4-1) - 2x(x^2-1) = (x^2-1)(x^2+1) - 2x(x^2-1) =$

$= (x^2-1)(x^2+1-2x) = (x-1)(x+1)(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^3$

$x_1 = 1$

$x_{2,3,4} = 1$

13) $y = x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 - x + 6 = x^3(x^2+x-6) - (x^2+x-6) = (x^2+x-6)(x^3-1) =$

$= (x+3)(x-2)(x-1)(x^2+x+1)$

reálné kořeny $x_1 = -3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1$

21) $y = x^5 - x^4 - 15x^3 + 5x^2 + 34x - 24$

MOŽNÉ KOŘENY: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

	1	-1	-15	5	34	-24
1	1	0	-15	-10	24	$\boxed{0}$
1	1	1	-14	-24	$\boxed{0}$	
~~2~~	~~1~~	~~3~~	~~-8~~	~~$\boxed{-40}$~~ $\neq 0$		
-3	1	-2	-8	$\boxed{0}$		

$f(x) = (x-1)(x^4 - 15x^2 - 10x + 24)$

$f(x) = (x-1)^2 \cdot (x^3 + x^2 - 14x - 24)$

$f(x) = (x-1)^2(x+3)(x^2 - 2x - 8)$

$f(x) = (x-1)^2(x+3)(x-4)(x+2)$

$x_{1,2} = 1, \quad x_3 = -3, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = -2$

22) $f(x) = 4x^4 + 3x^2 + 1$

$(a \pm b)^2 = (a^2 \pm 2ab + b^2)$

- polynom nemá reálné kořeny

$4x^4 + 3x^2 + 1$

a) $4x^4 + 3x^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}_{>1}$ $\quad a^2 - b^2$

$(\underbrace{2x^2}_{a} + \frac{3}{4})^2$

nelze použít

b) $4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 + 3x^2 = (2x^2 + 1)^2 - x^2 =$

$(2x^2 + 1)^2$

$= (2x^2 + 1 - x)(2x^2 + 1 + x) =$

$= (2x^2 - x + 1)(2x^2 + x + 1)$

Příklad 9.3. Napište schéma rozkladu funkce na parciální zlomky:

1. $f : y = \dfrac{2x^3 + x - 4}{(x^3 + 1)(x^4 - 1)(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1)} = \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$ $\quad$ st $g_1 = 3$, st $g_2 = 11$

g_2:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$
$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$$
$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$
$$x^2 + 1 = x^2 + 1$$

$$f(x) = \frac{2x^3 + x - 4}{(x-1)^3 (x+1)^2 (x^2 - x + 1)(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1} + \frac{E_1 x + F_1}{x^2+1} + \frac{E_2 x + F_2}{(x^2+1)^2}$$