PŘÍKLAD 1.1.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

1, 1, 4 – HLAVNÍ DIAGONÁLA

3, 1, 2 – VEDLEJŠÍ DIAGONÁLA

(3,3)... $m=3$ ŘÁD MATICE

$$(a)^1_m = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

SLOUPCOVÁ MATICE

SLOUPCOVÝ VEKTOR

$$(a)^n_1 = (1\ 2\ 3)$$

ŘÁDKOVÁ MATICE

ŘÁDKOVÝ VEKTOR

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

OBDÉLNÍKOVÁ MATICE

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

ČTVERCOVÁ MATICE

PŘÍKLAD 1.2.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

SYMETRICKÁ MATICE

PŘÍKLAD 1.3.

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 4\\ -3 & -4 & 0\end{pmatrix}$$

ANTISYMETRICKÁ MATICE

PŘÍKLAD 1.4

$$\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

NULOVÁ MATICE

PŘÍKLAD 1.5.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & 0\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & 0\end{pmatrix} \qquad A = B$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & 0\end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad C \neq D$$

PŘÍKLAD 1.6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}_{2/3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{2/3}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2/2}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$A+C$, $C+A$, $B+C$, $C+B$ – NEEXISTUJÍ

$$2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

PŘÍKLAD 1.7.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{2/3} \qquad B = \begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \\ s & p & r \end{pmatrix}_{3/3}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a \cdot i + b \cdot l + c \cdot s & a \cdot j + b \cdot m + c \cdot p & a \cdot k + b \cdot n + c \cdot r \\ d \cdot i + e l + f s & d j + e \cdot m + f \cdot p & d k + e \cdot n + f \cdot r \end{pmatrix}_{2/3}$$

$B \cdot C$ – NEEXISTUJE

PŘÍKLAD 1.8.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2/3} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}_{3/2}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & -3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}_{2/2}$$

PŘÍKLAD 1.9.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{1/3} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{3/1}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}_{1/1}$$

PŘÍKLAD 1.10.

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{3,1} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{1,3}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

PŘÍKLAD 1.11.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 12 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 12 & 26 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = B \cdot A$ – MATICE JSOU ZAMĚNITELNÉ

PŘÍKLAD 1.12.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$ – MATICE NEJSOU ZAMĚNITELNÉ

PŘÍKLAD 1.13

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 26 & 27 \end{pmatrix}$$

PŘÍKLAD 1.14.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}_{1,3}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{3,2}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}_{3,1}$ $\quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{2,3}$

PŘÍKLAD 1.15.

ČTVERCOVOU MATICI LZE ROZLOŽIT NA SOUČET SYMETRICKÉ A ANTISYMETRICKÉ MATICE

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

PŘÍKLAD 1.16.

URČETE HODNOST MATICE.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \overset{(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$n = 3$

$h(A) = 3$

$\Rightarrow$ MATICE JE REGULÁRNÍ

b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$n = 3$, $h(A) = 3$, $\Rightarrow$ MATICE JE REGULÁRNÍ

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{2} \\ 0 & 4 & 10 & 5 \end{pmatrix} \overset{(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$n = 4$

$h(A) = 3$

$n - h(A) = 1$

$\Downarrow$

NULITA MATICE (DEFEKT)

d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n=4$

$h(A)=3$

$n-h(A)=1$

MATICE JE SINGULÁRNÍ

PŘÍKLAD 1.17. ŘEŠTE SOUSTAVU ROVNIC

a)
$$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 3x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) (-2)\,(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -5 & -7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-\tfrac{1}{5}) \\ (-3) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right) (-3)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$h(A) = h(A_r) \Rightarrow \exists$ ŘEŠENÍ

$h(A) = 3 = n \Rightarrow \exists!$ ŘEŠENÍ

$2z = 4$, $\quad y + z = 1$, $\quad x + 2y + z = 3$

$z = 2$ $\quad y + 2 = 1$ $\quad x + 2(-1) + 2 = 3$

$y = -1$ $\quad x = 3$

$K = \{(3, -1, 2)^T\}$

b)
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - z &= 5 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$h(A) = 2 \neq h(A_r) = 3 \Rightarrow$ SOUSTAVA NEMÁ ŘEŠENÍ

$K = \emptyset$

c) $x + 2y + z = 4$
$x + 2y - 2z = -2$
$3x + 6y - 3z = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1)\ (-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{array}\right) (-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{h(A) = h(A_2)}_{\Downarrow\ \exists \text{ ŘEŠENÍ}} = \underbrace{2 < 3 = n}_{\Downarrow\ \infty \text{ ŘEŠENÍ}} \qquad n - h(A) = 3 - 2 = 1 \text{ PARAMETR}$$

$-3z = -6$, $y = t$, $x + 2y + z = 4$
$z = 2$ $\qquad x + 2t + 2 = 4$
$x = 2 - 2t$

$K = \{(2-2t, t, 2)^T, t \in \mathbb{R}\}$

d) $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$
$2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-1)\ (-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{h(A) = h(A_2)}_{\Downarrow\ \exists \text{ ŘEŠENÍ}} = \underbrace{2 < 4 = n}_{\Downarrow\ \infty \text{ ŘEŠENÍ}} \qquad n - h(A) = 4 - 2 = 2 \text{ PARAMETRY}$$

$x_4 = t$; $2x_3 - 2x_4 = 1$, $x_2 = s$, $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$
$2x_3 - 2t = 1$ $\qquad x_1 - s - \frac{1}{2} - t + t = 0$
$2x_3 = 1 + 2t$ $\qquad x_1 = \frac{1}{2} + s$
$x_3 = \frac{1}{2} + t$

$K = \{(\frac{1}{2} + s, s, \frac{1}{2} + t, t)^T, s, t \in \mathbb{R}\}$
$= \{(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^T + (1, 1, 0, 0)^T \cdot s + (0, 0, 1, 1)^T \cdot t, s, t \in \mathbb{R}\}$

PŘÍKLAD 1.18. ŘEŠTE HOMOGENNÍ SOUSTAVU ROVNIC.

a) $x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0$
$2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0$
$3x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (-2)\ (-3) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{array}{c} (-\frac{1}{5}) \\ (-\frac{1}{10}) \end{array}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & -5\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & -5\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$h(A)=h(A_r)=\underbrace{2<4}$

$\Downarrow$

∞ ŘEŠENÍ

$n-h(A)=4-2=2$ PARAMETRY

$x_4=t$, $x_3=s$, $x_2-2x_4=0$, $x_1+2x_2-2x_3-5x_4=0$

$x_2-2t=0$, $x_1+2\cdot 2t-2s-5t=0$

$x_2=2t$, $x_1=2s+t$

$K=\{(2s+t,2t,s,t)^T, s,t\in\mathbb{R}\}$

b)
$$\begin{aligned} x_1-2x_2-4x_3&=0\\ 2x_1+x_2+2x_3&=0\\ 3x_1-x_2-2x_3&=0\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & 5 & 10\\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{10}\end{pmatrix}$$

$h(A)=h(A_r)=2<3 \Rightarrow \infty$ ŘEŠENÍ $n-h(A)=3-2=1$ PAR.

$x_3=t$, $x_2+2x_3=0$, $x_1-2x_2-4x_3=0$

$x_2+2\cdot t=0$, $x_1-2(-2)t-4t=0$

$x=-2t$, $x_1=0$

$K=\{(0,-2t,t)^T, t\in\mathbb{R}\}$

$=\{(0,0,0)^T+(0,-2,1)^T\cdot t, t\in\mathbb{R}\}$