BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

1. Matice, systémy lineárních algebraických rovnic, Gaussova eliminační metoda

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

[1] Novotný, Jiří: *Matematika I, Modul 1, Základy lineární algebry*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-748-2

Carl Friedrich Gauss

Matice

Definice

Maticí typu (m, n), kde m, n jsou přirozaná čísla, rozumíme uspořádanou soustavu $m \cdot n$ čísel zapsaných ve tvaru tabulky do m rádků a n sloupců. Matici typu (m, n) zapisujeme takto

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Čísla $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ nazýváme **prvky matice**. Prvek ležící v i-tém řádku a j-tém sloupci značíme a_{ij}. První index se nazývá **řádkový**, druhý index **sloupcový**.

Matice

Poznámky:

- Prvky matice mohou být reálná i komplexní čísla.
- Prvky mohou být i obecnějšího charakteru – konstanty, proměnné i funkce.
- My se budeme zabývat maticemi tvořenými reálnými čísly.
- Značení: A, $(a_{ij})_m^n$, $[a_{ij}]_{m,n}$, $\|a_{ij}\|_m^n$.

Matice

Definice

Nechť A je matice typu (m, n). Je-li $m \neq n$, A se nazývá **obdélníková matice**. Je-li $m = n$, A se nazývá **čtvercová matice**. Číslo n pak nazýváme **řádem** čtvercové matice A. Prvky $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ tvoří **hlavní diagonálu** (úhlopříčku) a prvky $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ **vedlejší diagonálu** matice A.

Definice

Matice typu $(1, n)$ se nazývá **řádková matice** (řádkový vektor), matice typu $(n, 1)$ se nazývá **sloupcová matice** (sloupcový vektor).

Definice

Čtvercovou matici řádu n nazýváme **diagonální**, jestliže všechny její prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové, tj. $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Definice (pokračování)

V případě, že $d_i = 1$ pro $i = 1, 2, \dots, n$, se diagonální matice nazývá **jednotková matice** a značí se E (případně I)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Definice

Čtvercovou matici řádu n nazýváme **dolní** resp. **horní trojúhelníkovou maticí**, jestliže všechny její prvky nad resp. pod hlavní diagonálou jsou nulové, tj. jestliže $a_{ij} = 0$ pro $j > i$, resp. pro $i > j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
Dolní resp. horní trojúhelníková matice má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Definice

Čtvercová matice řádu n se nazývá **symetrická**, jestliže $a_{ij} = a_{ji}$, pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$, tj. prvky symetricky položené vzhledem k hlavní diagonále jsou stejné.

Definice

Čtvercová matice řádu n se nazývá **antisymetrická**, jestliže $a_{ij} = -a_{ji}$, pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$, tj. prvky symetricky položené vzhledem k hlavní diagonále se liší znaménkem a všechny prvky v hlavní diagonále jsou nulové.

Definice

Matici typu (m, n) nazýváme **nulová matice**, jestliže všechny její prvky jsou rovny 0, tj. $a_{ij} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$. Nulová matice se značí O.

Definice (Rovnost matic)

Dvě matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ téhož typu (m, n) jsou si **rovny**, píšeme $A = B$, právě když odpovídající prvky jsou stejné, tj. $a_{ij} = b_{ij}$ pro $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$.

Definice (Součet matic)

Jestliže $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ jsou matice téhož typu (m, n), pak **součtem** matic A, B rozumíme matici $C = (c_{ij})$ typu (m, n), píšeme $C = A + B$, jejíž prvky jsou součtem odpovídajících si prvků, tj. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$.

Definice (Násobení matice číslem)

K-násobkem matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) rozumíme matici C téhož typu jako A, píšeme $C = kA$, jejíž prvky jsou k-násobky prvků mtice A, tj. $c_{ij} = ka_{ij}$ pro $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$.

Definice

Matice $(-1)A$ se nazývá **opačná matice** k matici A a označujeme ji $-A$. Jsou-li A, B matice téhož typu, pak výraz $A + (-B)$ se nazývá **rozdíl** matic A, B a píšeme $A + (-B) = A - B$.

Věta

Jsou-li A, B, C libovolné matice téhož typu, k, k_1, k_2 libovolná reálná čísla, pak platí následující vztahy.

1. $A + B = B + A$ *(komutativní zákon)*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(asociativní zákon)*
3. $A + O = A$, *kde O je nulová matice téhož typu jako A.*
4. $A + (-A) = O$, *kde O je nulová matice téhož typu jako A.*
5. $1 \cdot A = A$
6. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$ *(asociativní zákon pro násobení číslem)*
7. $(k_1+k_2)A = k_1A+k_2A$ *(1. distributivní zákon pro násobení matice číslem)*
8. $k(A + B) = kA + kB$ *(2. distributivní zákon pro násobení matice číslem)*

Definice (Součin matic)

Nechť $A = a_{ij}$ je matice typu (m, n) a $B = b_{jk}$ je matice typu (n, p). **Součinem** matice A s maticí B v daném pořadí rozumíme matici $C = c_{ik}$ typu (m, p), píšeme $C = A \cdot B$, pro jejíž prvky platí

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, m; k = 1, 2, \ldots, p.$$

Poznámka:
Násobení matic obecně není komutativní, tj. neplatí obecně, že $A \cdot B = B \cdot A$.

Definice

Čtvercové matice A, B řádu n se nazývají **zaměnitelné** (komutativní), jestliže platí $A \cdot B = B \cdot A$.

Věta

Jsou-li matice A, nulová matice O a jednotková matice E čtvercové matice stejného řádu n, pak platí

$$A \cdot O = O \cdot A = O, \quad A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Věta (Základní vlastnosti součinu matic)

Nechť A, B, C jsou matice, k číslo. Pak platí následující vztahy.

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ *(asociativní zákon)*
2. $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$ *(asociativní zákon pro násobení součinu matic číslem)*
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ *(1. distributivní zákon)*
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ *(2. distributivní zákon)*

Mocnina matice:

$$A^0 = E$$
$$A^2 = A \cdot A$$
$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$
$$\vdots$$
$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$$

Definice (Transponování matice)

Jestliže

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

je matice typu (m, n), potom matici

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

typu (n, m) nazýváme **transponovaná matice** k matici A.

Operace s maticemi

Věta (Základní vlastnosti transponování matic)

Nechť A, B, C jsou matice vhodných typů a k reálné číslo. Pak platí následující vztahy.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$
4. $(kA)^T = kA^T$

Poznámka:

1. Je-li matice A symetrická, potom platí $A^T = A$.
2. Je-li matice A antisymetrická, potom platí $A^T = -A$.
3. Pro každou čtvercovou matici A je $A + A^T$ symetrická matice a $A - A^T$ antisymetrická matice. Protože platí

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Hodnost matice

Definice

Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

typu (m, n). **Hodností matice** A rozumíme přirozené číslo, udávající maximální počet lineárně nezávislých řádkových vektorů matice A. Hodnost matice budeme značit $h(A)$.

Platí:

$$0 \leq h(A) \leq \min(m, n)$$

Definice

Nechť $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k} \in \mathbb{R}^n$ jsou aritmetické vektory. Říkáme, že tyto vektory jsou **lineárně nezávislé**, jestliže rovnice $\alpha_1\mathbf{a_1} + \alpha_2\mathbf{a_2} + \cdots + \alpha_k\mathbf{a_k} = \mathbf{o}$, kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, je splněna jen pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

V opačném případě, kdy uvedená rovnice platí, přičemž alespoň jedno číslo $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq k$, nazývají se tyto vektory $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ **lineárně závislé**.

Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **lineární kombinace** vektorů $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k} \in \mathbb{R}^n$, existují-li taková reálná čísla $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, že platí $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{a_1} + \beta_2\mathbf{a_2} + \cdots + \beta_k\mathbf{a_k}$.

Definice

Mějme matici $A = a_{ij}$ typu (m, n). **Elementárními úpravami** matice A budeme rozumět kteroukoliv z následujících úprav:

- i přehození i-tého a j-tého řádku (resp. sloupce);
- ii vynásobení i-tého řádku (resp. sloupce) nenulovým číslem;
- iii přičtení k-násobku i-tého rádku (resp. sloupce) k j-tému řádku (resp. sloupci).

Poznámka:

1. Pokud upravujeme jen řádky, hovoříme o řádkových úpravách, analogicky zavádíme sloupcové úpravy.
2. Jestliže matice B vznikla elementární úpravou matice A, používáme pro označení vztahu mezi nimi značku $A \sim B$.
3. Pomocí elementárních úprav převádíme matici A na tzv. **schodovitou matici** $B = b_{ij}$ téhož typu (m, n).

Hodnost matice

Věta

Elementární úpravy matice nemění její hodnost.

Věta

Pro každou matici A platí $h(A) = h(A^T)$, tj. hodnost matice se rovná hodnosti transponované matice.

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá **regulární**, jestliže platí $h(A) = n$, tj. jestliže její hodnost je stejná jako její řád. Není-li matice A regulární, říkáme, že je **singulární**. Pak $h(A) < n$ a číslo $n - h(A)$ se nazývá **defekt** (nebo též **nulita**) matice A.

Systémy lineárních algebraických rovnic

Definice

Systém m **lineárních rovnic** o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ má tvar

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde čísla $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ jsou **koeficienty** u neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ a čísla $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ jsou **absolutní členy** daného systému.

Definice (pokračování)

Matici koeficientů

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme **maticí soustavy**. Přidáme-li k ní sloupec absolutních členů (pravých stran), získáme tzv. **rozšířenou matici soustavy**

$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Definice (pokračování)

Označíme-li **vektor neznámých**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

vektor pravých stran

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

můžeme soustavu psát v maticovém tvaru

$$A \cdot X = B.$$

Definice

Je-li alespoň jeden z absolutních členů různý od nuly, nazývá se soustava $A \cdot X = B$ **nehomogenní**. Jestliže $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, hovoříme o **homogenní** soustavě.

Problémy:

1. Je systém řešitelný?
2. V případě, že je řešitelný? Kolik má řešení?
3. Jak určit všechna řešení?

Definice

Uspořádanou n-tici čísel $X = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ nazýváme **řešením** systému $A \cdot X = B$, jestliže po dosazení r_1 za x_1, r_2 za x_2, ..., r_n za x_n do $A \cdot X = B$ dostaneme m identit.

Věta (Frobeniova / Kroneckerova-Cappeliova věta)

Systém lineárních algebraických rovnic $A \cdot X = B$ má řešení, právě když matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají stejnou hodnost, tj. $h(A) = h(A_r) = h$. Pro $h = n$ má systém právě jedno řešení; pro $h < n$ má systém nekonečně mnoho řešení, přičemž hodnoty vhodných $n-h$ neznámých lze libovolně volit jako parametry.

Věta

Nechť je dán systém S lineárních algebraických rovnic $A \cdot X = B$. Utvořme ze systému S nový systém S' pomocí následujících úprav.

1. *Vyměníme vzájemně dvě rovnice systému S.*
2. *Násobíme některou rovnici systému S číslem $k \neq 0$.*
3. *Přičteme k jedné rovnici systému S k-násobek jiné rovnice systému S.*
4. *Přičteme k jedné rovnici systému S libovolnou lineární kombinaci ostatních rovnic systému S.*
5. *Připojíme k systému S rovnici, která je lineární kombinací rovnic systému S.*
6. *Vynecháme v systému S rovnici, která je lineární kombinací ostatních rovnic systému S.*

Pak oba systémy S a S' mají stejnou množinu řešení

Poznámky:

1. Na tomto principu spočívá **Gaussova eliminační metoda** řešení systémů lineárních algebraických rovnic.
2. Systém převedeme na schodovitý tvar.
3. Rozhodneme o existenci a počtu řešení.
4. Zpětný výpočet můžeme provádět také přímo v matici A, tzv. **Jordanova metoda**.

Řešení homogenních systémů:

- Uvažujme homogenní soustavu m lineárních algebraických rovnic pro n neznámých $A \cdot X = O$, tj.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}.$$

- Tato soustava má vždy řešení, protože $h(A) = h(A_r)$.
- Je-li $h(A) = n$, pak má systém jediné řešení $X = (0, 0, \dots, 0)$ tzv. **nulové** neboli **triviální řešení.**
- Je-li $h(A) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení, která závisejí na $n - h$ parametrech.

Věta

Homogenní soustava $A \cdot X = O$ n rovnic o n neznámých má netriviální řešení, právě když determinant soustavy je roven nule, tj. $|A| = 0$.

Děkuji za pozornost!