FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

2. Inverzní matice, determinanty

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

[1] Novotný, Jiří: *Matematika I, Modul 1, Základy lineární algebry*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-748-2

Gottfried Wilhelm Leibniz

Inverzní matice

Motivace:
Uvažujme maticovou rovnici $A \cdot X = B$, kde A, B jsou dané matice a X je matice s neznámými prvky. Kdyby existovala matice A^{-1} s vlastností $A^{-1} \cdot A = E$, kde E je jednotková matice, mohli bychom danou maticovou rovnici řešit takto:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \\ A^{-1} \cdot (A \cdot X) &= A^{-1} \cdot B \\ (A^{-1} \cdot A) \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ E \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Definice

Nechť A je daná čtvercová matice. Existuje-li matice Z tak, že platí $A \cdot Z = Z \cdot A = E$, kde E je jednotková matice, nazýváme Z **inverzní maticí** k dané matici A a značíme $Z = A^{-1}$.

Věta

Inverzní matice k matici A existuje, právě když matice A je regulární.

Věta

Nechť A je regulární matice. Potom k ní existuje právě jedna inverzní matice.

Inverzní matice

Věta

Nechť A, B jsou regulární matice stejného řádu a $k \neq 0$ reálné číslo. Pak platí

1. *Inverzní matice k jednotkové matici je jednotková matice, tj.* $E^{-1} = E$.
2. *Jestliže* A^{-1} *je inverzní matice k matici* A, *je obráceně* A *inverzní matice k matici* A^{-1}, *tj.* $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. *Transponovaná inverzní matice je rovna inverzní matici k transponované matici, tj.* $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.
4. *Inverzní matice k matici násobené nenulovým číslem je rovna inverzní matici násobené převrácenou hodnotou tohoto čísla, tj.* $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$, $k \neq 0$.
5. *Inverzní matice k součinu dvou matic je rovna součinu jejich inverzních matic v obráceném pořadí, tj.* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Metoda výpočtu:

- Napíšeme vedle sebe danou čtvercovou matici A a jednotkovou matici E stejného řádu.
- Na takto vzniklou matici jako celek aplikujeme elementární řádkové úpravy.
- Dostaneme na místě matice A jednotkovou matici E. Protože $E = A^{-1} \cdot A$, na pravé straně bude matice inverzní.

$$
\begin{gathered}
(A|E) \\
(A_1 \cdot A|A_1 \cdot E) \\
(A_2 \cdot A_1 \cdot A|A_2 \cdot A_1 \cdot E) \\
\dots|\dots \\
(\underbrace{A_p \cdot \dots A_2 \cdot A_1 \cdot A}_{E} \,|\, \underbrace{A_p \cdot \dots A_2 \cdot A_1 \cdot E}_{A^{-1}})
\end{gathered}
$$

Inverzní matice

Příklad 2.1

Vypočtěte inverzní matici k matici A metodou elementárních řádkových úprav a ověřte správnost výsledku, jestliže:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 2.2

Vypočtěte inverzní matici k matici A, jestliže:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Maticové rovnice

Úloha řešit maticovou rovnici o jedné neznámé X, znamená najít takovou matici X, která, dosazena do maticové rovnice, ji převede po provedení naznačených početních operací s maticemi na rovnost dvou matic.

- Z maticové rovnice osamostatníme neznámou matici X.
- Neznámou matici X vypočteme.

Příklad 2.3

Řešte maticovou rovnici $A \cdot X \cdot B = C$, jestliže:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determinanty 2. řádu

Definice

Nechť A_{ij}, $i, j = 1, 2$ jsou libovolná reálná čísla. Schematu tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

kterému je přiřazeno číslo $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$, se nazývá **determinant druhého řádu**.

Křížové pravidlo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Determinanty 3. řádu

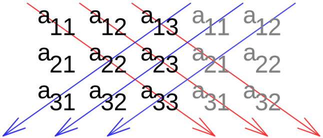
Definice

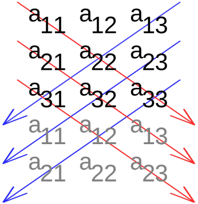
Nechť A_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ jsou libovolná reálná čísla. Schematu tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

kterému je přiřazeno číslo $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$, se nazývá **determinant třetího řádu**.

Sarrusovo pravidlo:





Příklad 2.4

Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Vlastnosti determinantů

1. **(Rovnoprávnost řádků a sloupců)** Hodnota determinantu se nemění, vyměníme-li sloupce za řádky (tzv. transponování) $\Rightarrow$ Platí-li nějaké tvrzení pro řádky, platí i pro sloupce a naopak.
2. **(O výměně řad)** Vyměníme-li v determinantu mezi sebou dva navzájem různé řádky (sloupce), změní se znaménko hodnory determinantu.
3. Jestliže některý řádek (sloupec) determinantu obsahuje **samé nuly**, pak je hodnota determinantu rovna nule.
4. Hodnota determinantu, který má dva **stejné řádky (sloupce)**, je rovna nule.
5. **(O násobení řady číslem)** Vynásobíme-li nějaký řádek (sloupec) determinantu číslem k, pak hodnota vzniklého determinantu je $k-$násobek hodnoty původního determinantu.

Vlastnosti determinantů

6. Je-li nějaký řádek (sloupec) determinantu násobkem jiného řádku (sloupce), má determinant hodnotu rovnu nule.
   Plyne z vlastností 4 a 5.
7. Determinant, v jehož jednom řádku (sloupci) jsou jako prvky součty dvou čísel, můžeme nahradit součtem dvou determinantů. Obráceně součet dvou determinantů, které se liší jen prvky jednoho řádku (sloupce), můžeme nahradit jedním determinantem.
8. Hodnota determinantu se nezmění, jestliže k jednomu řádku (sloupci) přičteme $k-$násobek jiného řádku (sloupce).
9. Hodnota determinantu se nezmení, přičteme-li k danému rádku (sloupci) lineární kombinaci zbylých řádků (sloupců). Přitom na řádky (sloupce) determinantu pohlížíme jako na aritmetické vektory.
   Plyne z vlastností 7 a 8.
10. Jsou-li v determinantu všechny prvky nad (pod) hlavní diagonálou rovny nule, je hodnota determinantu rovna součinu prvků v hlavní diagonále.

Vlastnosti determinantů

Příklad 2.5

Odvoďte vlastnost 5.

Příklad 2.6

Odvoďte vlastnost 7.

Příklad 2.7

Odvoďte vlastnost 8.

Definice

Jestliže $|A| = |a_{ij}|$ je determinant, pak **subdeterminantem** (minorem) A_{ij} přidruženým k prvku a_{ij} rozumíme determinant, který vznikne z determinantu $|A|$ vynecháním $i-$tého řádku a $j-$tého sloupce, tj. řádku a sloupce, ve kterém leží prvek a_{ij}. **Algebraickým doplňkem** $\overline{A}_{ij}$ prvku a_{ij} rozumíme subdeterminant přidružený k prvku a_{ij} vynásobený číslem $(-1)^{i+j}$. Platí tedy $\overline{A}_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$.

Věta (Laplaceův rozvoj)

Determinant je roven součtu součinů prvků libovolného (ale pevně zvoleného) řádku (sloupce) s příslušnými algebraickými doplňky. Tj.

$$|A| = \sum_j a_{ij}\overline{A}_{ij} = \sum_i a_{ij}\overline{A}_{ij}.$$

Determinanty $n-$tého řádu

Definice

Nechť a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ jsou libovolná reálná čísla. Schema tvaru

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

kterému je přiřazeno číslo $a_{i1}\overline{A}_{i1} + a_{i2}\overline{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\overline{A}_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{A}_{ij}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, což se rovná číslu $a_{1j}\overline{A}_{1j} + a_{2j}\overline{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\overline{A}_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{A}_{ij}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\overline{A}_{ij}$ jsou algebraické doplňky prvků a_{ij} v $|A|$, se nazývá **determinant** $n-$**tého řádu**.

Příklad 2.8

Pro determinant $|A|$ určete subtedetminant A_{23} a příslušný algebraický doplněk $\overline{A}_{23}$, jestliže

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Věta (Vlastnosti determinantů)

1. *Hodnota determinantu se nemění, vyměníme-li sloupce za řádky.*
2. *Vyměníme-li v determinantu mezi sebou dva různé řádky (sloupce), změní se znaménko hodnoty determinantu.*
3. *Obsahuje-li některý řádek (sloupec) determinantu samé nuly, je hodnota determinantu rovna nule*
4. *Determinant, který má dva stejné řádky (sloupce), je roven nule.*
5. *Vynásobíme-li některý řádek (sloupec) determinantu číslem k, je hodnota nově vzniklého determinantu rovna $k-$násobku hodnoty původního determinantu.*

Věta (Vlastnosti determinantů)

6. *Je-li některý řádek (sloupec) determinantu roven $k-$násobku jiného řádku (sloupce), je determinant roven nule.*
7. *Jsou-li A, B, C determinanty lišící se pouze v $k-$tém řádku (sloupci), přičemž $k-$tý řádek (sloupec) determinantu $|C|$ je součtem $k-$tých řádků (sloupců) determinantů $|A|$ a $|B|$, pak platí $|C| = |A| + |B|$.*
8. *Hodnota determinantu se nemění, přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) $k-$násobek jiného řádku (sloupce).*
9. *Hodnota determinantu se nemění, přičteme-li k danému řádku (sloupci) lineární kombinaci zbylých řádků (sloupců).*
10. *Jsou-li v determinantu všechny prvky nad (pod) hlavní diagonálou rovny nule, je hodnota determinantu rovna součinu prvků v hlavní diagonále.*

Příklad 2.9

Vypočtěte determinant pomocí Laplaceova rozvoje, jestliže

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Příklad 2.10

Vypočtěte determinant pomocí přechodu na schodovitý tvar, jestliže

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 5 \\ 6 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Definice

Nechť $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ je čtvercová matice $n-$tého řádu. Matice $\begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{21} & \dots & \overline{A}_{n1} \\ \overline{A}_{12} & \overline{A}_{22} & \dots & \overline{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{A}_{1n} & \overline{A}_{2n} & \dots & \overline{A}_{nn} \end{pmatrix}$, kde $\overline{A}_{ij}$ je algebraický doplněk prvku a_{ij}, se nazývá **adjungovaná matice** k matici A a označuje se $adj\, A$.

Poznámka:

Platí

$$adj\, A = (\overline{A}_{ji}) = (\overline{A}_{ij})^T.$$

Věta

Nechť A je čtvercová matice, přičemž hodnota jejího determinantu $|A|$ je různá od nuly. Pak matice

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\, A$$

je inverzní matice k matici A.

Věta

Čtvercová matice A je **regulární**, *jestliže hodnota jejího determinantu je různá od nuly. Jestliže $|A| = 0$, je matice A* **singulární**.

Věta

Nechť A, B jsou čtvercové matice $n-$tého řádu a k libovolné reálné číslo. Pak platí následující vztahy.

1. *Jestliže $A = B$, pak $|A| = |B|$.*
2. $|kA| = k^n|A|$.
3. $|A^T| = |A|$.
4. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.
5. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

Věta

Inverzní matice ke čtvercové matici A existuje, právě když matice A je regulární.

Věta (Cramerovo pravidlo)

Nechť determinant matice soustavy $A \cdot X = B$ je různý od nuly, tj. $|A| \neq 0$. Pak má daná soustava rovnic právě jedno řešení

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ \textit{kde}\ x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Přitom $|A_i|$ jsou determinanty vzniklé z determinantu $|A|$ nahrazením i–tého sloupce sloupcem absolutních členů.

Děkuji za pozornost!