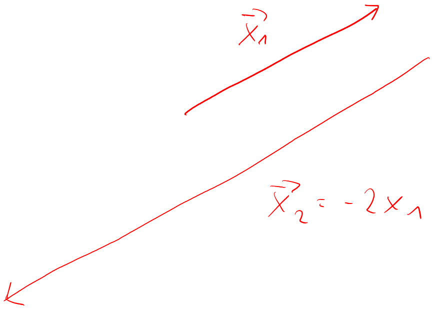
Příklad 3.1

Vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2 = -2\vec{x}_1$ jsou kolineární, protože vektor $\vec{x}_2$ je násobkem vektoru $\vec{x}_1$. V jiném pohledu, platí rovnice $2\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{o}$ a rovnice $k\vec{x}_1 + l\vec{x}_2 = \vec{o}$ má nenulové řešení $k = 2$, $l = 1$.



$2\vec{x}_1 + 1\vec{x}_2 = \vec{o}$

$2\vec{x}_1 + (-2\vec{x}_1) = \vec{o}$

$k = 2$, $l = 1$

Příklad 3.2

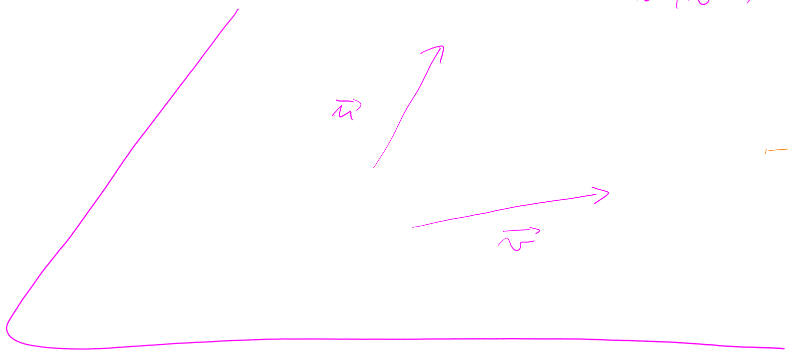
Vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ jsou nekolineární. Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, $\vec{v} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ rovněž nekolineární.

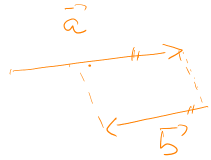
$$\vec{u} = k\vec{v}$$
$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$
$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = k\vec{x}_1 - k\vec{x}_2$$

$(1-k)\vec{x}_1 + (1+k)\vec{x}_2 = \vec{o}$ $\Rightarrow$ protože $\vec{x}_1$ a $\vec{x}_2$ jsou nekolineární, musí platit

$1-k=0 \wedge 1+k=0$ $\Rightarrow$ není možné $\Rightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}$ jsou také nekolineární

$\vec{u}, \vec{v}$ nejsou kolineární





$\vec{a}, \vec{b}$ jsou kolineární

$\vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b}$

Příklad 3.3

Vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ jsou nekomplanární. Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{u} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$, $\vec{v} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3$, $\vec{w} = \vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3$ rovněž nekomplanární.

$$k\vec{u} + l\vec{v} + m\vec{w} = \vec{o}$$

$$c_1 = k + l + m$$
$$c_2 = k - l + 3m$$
$$c_3 = k + l + m$$

$$k(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3) + l(\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3) + m(\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3) = \vec{o}$$

$$(k + l + m)\vec{x}_1 + (k - l + 3m)\vec{x}_2 + (k + l + m)\vec{x}_3 = 0$$

protože $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ jsou podle zadání nekomplanární

$$k + l + m = 0$$
$$k - l + 3m = 0$$
$$k + l + m = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k & l & m \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

-1

$$m = t$$
$$-2l + 2t = 0$$
$$l = t$$
$$k + t + t = 0$$
$$k = -2t$$

$$(-2t, t, t)^T, \; t \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$t = 1 \Rightarrow k = -2, \; l = m = 1$$

$\Rightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jsou komplanární

$$-2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{o}$$

Příklad 3.4

Vypočítejte $\|\vec{a}+\vec{b}\|$, jestliže $\|\vec{a}\| = 4$, $\|\vec{b}\| = 5$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \|u\|$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$

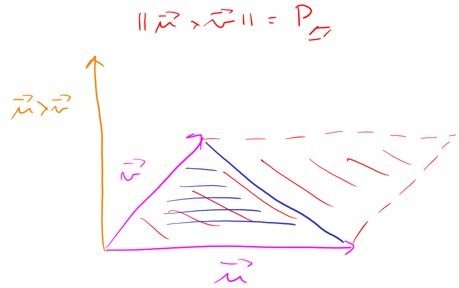
$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 =$$

$$= 4^2 + 2\cdot 4\cdot 5\cdot\cos\frac{2\pi}{3} + 5^2 = 16 - 20 + 25 = 21$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| = \underline{\underline{\sqrt{21}}}$$

Příklad 3.5

Vektory $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ mají délky $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ a svírají úhel $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$. Určete obsah trojúhelníku $\triangle ABC$.

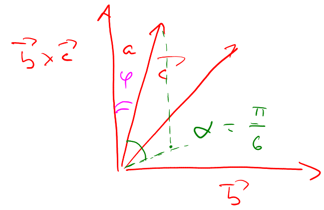


$$P_\triangle = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \frac{1}{2} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \, \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{4}\sqrt{2}}}$$

Příklad 3.6

Rovnoběžnostěn je určen vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ a víme, že $\|\vec{a}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{b}\| = 1$, $\|\vec{c}\| = 2$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{4}$, vektor $\vec{a}$ svírá se základnou určenou vektory $\vec{b}$, $\vec{c}$ úhel $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu.



$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\times\vec{c}\|\cdot\cos\measuredangle\underbrace{(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c})}_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}=\varphi} =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\|\vec{b}\times\vec{c}\|\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\|\vec{b}\times\vec{c}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{c}\|\cdot\sin(\vec{b}, \vec{c}) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \underline{\underline{1}}$$