FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

4. Aplikace vektorového počtu ve sférické trigonometrii

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

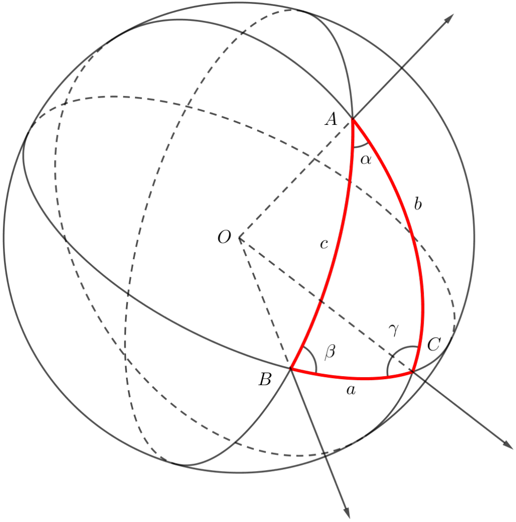
Základní literatura

[1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6

[2] Rektorys, Karel a spol.: *Přehled užité matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), Praha 1963.

Leonhard Paul Euler

Sférický trojúhelník



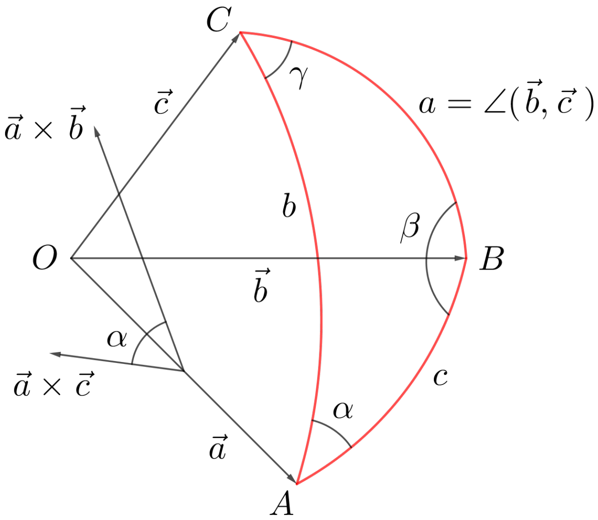
Sférický trojúhelník

V prostoru $\mathbb{E}_3$ zvolme body O, A, B, C tak, aby vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ byly *nekomplanární* a *jednotkové*, tj. $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 1$.

Opíšeme-li ze středu O jednotkovou kouli, pak body A, B, C leží na kulové ploše poloměru jedna a tvoří vrcholy **sférického torjúhelníku**.

Rovina procházející body O, A, B protne kulovou plochu v tzv. **hlavní kružnici** a kratší část hlavní kružnice mezi body A, B vytvoří **stranu** c **sférického trojúhelníku**. Podobným způsobem vytvoříme strany a, b sférického trojúhelníku.

Úhel mezi stranami b, c při vrcholu A sférického trojúhelníku označíme α. Podobně značí β, γ úhly při vrcholech B, C. Tyto úhly tvoří **odchylky stěn** trojbokého jehlanu určeného body O, A, B, C.



C
γ
$a = \angle(\vec{b}, \vec{c}\,)$
$\vec{c}$
$\vec{a} \times \vec{b}$
b
β
O
B
$\vec{b}$
α
$\vec{a} \times \vec{c}$
c
α
$\vec{a}$
A

Základní prvky sférického trojúhelníku

- vrcholy A, B, C sférického trojúhelníku
- strany a, b, c sférického trojúhelníku
- úhly α, β, γ sférického trojúhelníku

Mezi prvky sférického trojúhelníku platí:

(1)	$a = \angle(\vec{b}, \vec{c})$	$b = \angle(\vec{c}, \vec{a})$	$c = \angle(\vec{a}, \vec{b})$
(2)	$\alpha = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c})$	$\beta = \angle(\vec{b} \times \vec{c}, \vec{b} \times \vec{a})$	$\gamma = \angle(\vec{c} \times \vec{a}, \vec{c} \times \vec{b})$
(3)	$\cos a = \vec{b} \cdot \vec{c}$	$\cos b = \vec{c} \cdot \vec{a}$	$\cos c = \vec{a} \cdot \vec{b}$
(4)	$\sin a = \lVert \vec{b} \times \vec{c} \rVert$	$\sin b = \lVert \vec{c} \times \vec{a} \rVert$	$\sin c = \lVert \vec{a} \times \vec{b} \rVert$
(5)	$\cos\alpha = \frac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})}{\lVert\vec{a}\times\vec{b}\rVert\cdot\lVert\vec{a}\times\vec{c}\rVert}$	$\cos\beta = \frac{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{b}\times\vec{a})}{\lVert\vec{b}\times\vec{c}\rVert\cdot\lVert\vec{b}\times\vec{a}\rVert}$	$\cos\gamma = \frac{(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{c}\times\vec{b})}{\lVert\vec{c}\times\vec{a}\rVert\cdot\lVert\vec{c}\times\vec{b}\rVert}$

Sinova věta pro sférický trojúhelník

Viz skripta, Věta 5, vzorec (3):

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}.$$

Pro $\vec{d}=\vec{a}$ dostaneme:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\underbrace{\vec{c}\times\vec{a}}_{=-\vec{a}\times\vec{c}}) = \underbrace{[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]}_{0}\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{a}$$

tedy

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{a} = (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}).$$

V Euklidovské normě platí

$$\|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{a}\| = |[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|\cdot\underbrace{\|\vec{a}\|}_{=1} = \|(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})\| =$$

$$= \|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}\times\vec{c}\|\cdot\sin\alpha = \sin c\cdot\sin b\cdot\sin\alpha$$

Sinova věta pro sférický trojúhelník

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \sin c \cdot \sin b \cdot \sin \alpha$$

Podobně pokračujeme pro volby $\vec{d} = \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{c}$ cestou *cyklické zámeny*:

$$\vec{a} \longrightarrow \vec{b} \longrightarrow \vec{c} \longrightarrow \vec{a}$$
$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a$$
$$\alpha \longrightarrow \beta \longrightarrow \gamma \longrightarrow \alpha$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \sin c \cdot \sin b \cdot \sin \alpha$$
$$|[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]| = \sin a \cdot \sin c \cdot \sin \beta$$
$$|[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]| = \sin b \cdot \sin a \cdot \sin \gamma$$

Výměnou pořadí vektorů ve smíšeném součinu se mění nejvýše znaménko a s ohledem na absolutní hodnotu platí:

$$\sin c \cdot \sin b \cdot \sin \alpha = \sin a \cdot \sin c \cdot \sin \beta = \sin b \cdot \sin a \cdot \sin \gamma$$

$$\Big| \cdot \frac{1}{\sin a \sin b \sin c}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

Ve sférickém trojúhelníku poměry sinů stran ku sinům protilehlých úhlů jsou si rovny.

První kosinova věta pro sférický trojúhelník

Viz skripta, Věta 5, vzorec (1):

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix} = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})$$

Pro $\vec{d}=\vec{a}$ dostaneme:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\underbrace{\vec{c}\times\vec{a}}_{-\vec{a}\times\vec{c}}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{a}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{a}}_{\|\vec{a}\|^2=1})$$

tedy

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{a}) + \|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}\times\vec{c}\|\cdot\cos\alpha,$$

pomocí (3) dostaneme

$$\cos a = \cos b\cos c + \|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}\times\vec{c}\|\cdot\cos\alpha,$$

První kosinova věta pro sférický trojúhelník

Vzorce (4) vedou k **první kosinové větě** pro stranu a:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Cyklickou záměnou $a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a$, $\alpha \longrightarrow \beta \longrightarrow \gamma \longrightarrow \alpha$ získáme postupně **první kosinové věty** pro zbývající strany b, c:

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Poznámka: Je-li $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, je sférický trojúhelník pravoúhlý a poslední vzorec dává tvar *Pythagorovy věty* pro pravoúhlý sférický trojúhleník:

$$\cos c = \cos a \, \cos b.$$

Definice

Hlavní kružnice na dané kouli je taková kružnice ležící na této kouli, jejíž střed leží ve středu koule. Dvěma body A, B na kouli, které neleží na témž průměru, lze vést právě jednu hlavní kružnici; menší z obou oblouků, které na této kružnici vytnou body A, B, má nejmenší délku d ze všech křivek na dané kouli spojujících body A, B. Číslo d se nazývá **sférická vzdálenost** bodů A, B. Sférická vzdálenost protějších bodů na kouli je rovna polovině obvodu hlavní krurňnice.

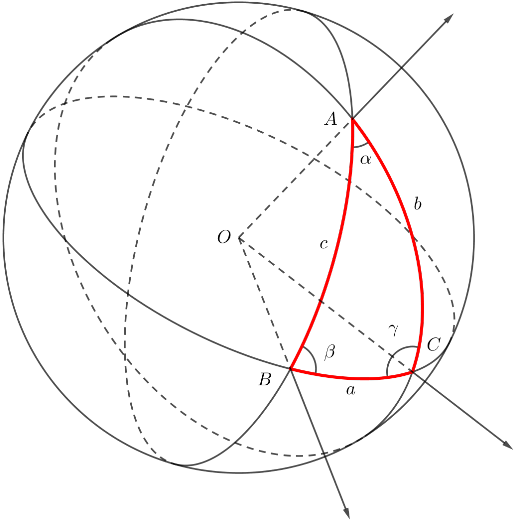
Rektorys, Karel a spol.: *Přehled užité matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), Praha 1963.

Definice (Sférický trojúhelník)

Nechť A, B, C jsou tři body na kouli, které neleží na téže hlavní kružnici. Spojíme-li je oblouky $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ hlavních kružnic, které se mimo body A, B, C neprotínají, rozpadne se kulová plocha na dva sférické trojúhelníky o vrcholech A, B, C. Zvolíme-li speciálně oblouky $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ tak, aby se jejich délky rovnaly sférickým vzdálenostem jejich krajních bodů A, B, C, pak menší z obou takto získaných trojúhelníků — tj. ten, který leží uvnitř trojhranu tvořeného polopřímkami OA, OB, OC vycházející ze středu O koule — se nazývá **Eulerův trojúhelník**.

Rektorys, Karel a spol.: *Přehled užité matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), Praha 1963.

Sférická trigonometrie



Definice

Strany a, b, c sférického trojúhelníka $\triangle ABC$ jsou délky příslušných oblouků $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ hlavních kružnic; jsou tedy určeny úhly $\angle BOC$, $\angle AOC$, $\angle AOB$ polopřímek OA, OB, OC a měří se v obloukové nebo stupňové míře.

Definice

Úhly α, β, γ sférického trojúhelníka $\triangle ABC$ jsou vnitřní úhly stěn trojhranu $OABC$; měří se v obloukové nebo stupňové míře.

Poznámka: Polopřímky spojující střed koule s vrcholy sférického trojúhelníka $\triangle ABC$ tvoří jeho **základní trojhran** $OABC$.

Rektorys, Karel a spol.: *Přehled užité matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), Praha 1963.

Věta

Strany a úhly sférického trojúhelníka jsou menší než 180° *(menší než* π *).*

Věta

Součet úhlů α, β, γ *sférického trojúhelníka je vždy větší než* 180°.

Definice

Sférickým excesem (nadbytkem) sférického trojúhelníka nazýváme číslo

$$\varepsilon^\circ = \alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ - 180^\circ.$$

Rektorys, Karel a spol.: *Přehled užité matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), Praha 1963.

Věta

Obsah sférického trojúhelníka je

$$P = \frac{\varepsilon^\circ}{180^\circ}\pi r^2$$

kde r je poloměr koule a ε° – nadbytek trojúhelníka vyjádřený ve stupních.

Rektorys, Karel a spol.: *Přehled užité matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), Praha 1963.

Děkuji za pozornost!