

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

4. Aplikace vektorového počtu ve sférické trigonometrii

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

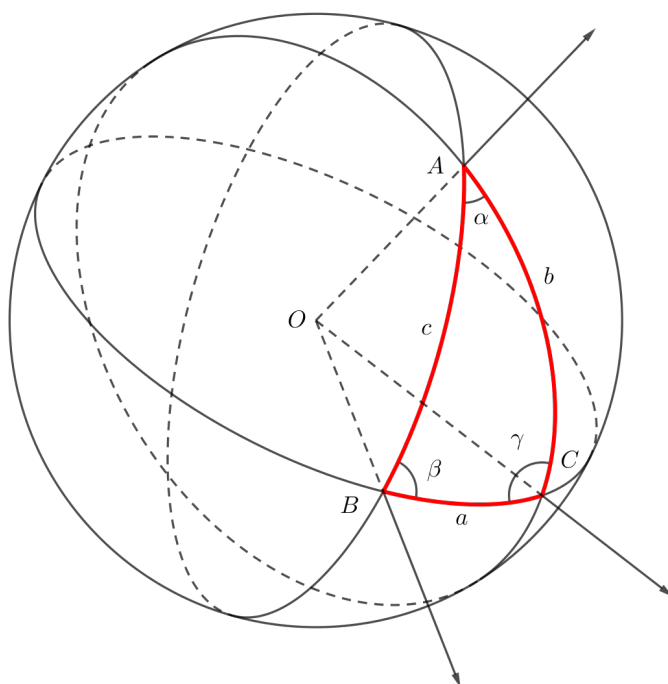
Základní literatura

- [1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6
- [2] Rektorys, Karel a spol.: *Přehled užité matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), Praha 1963.



Leonhard Paul Euler

Sférický trojúhelník

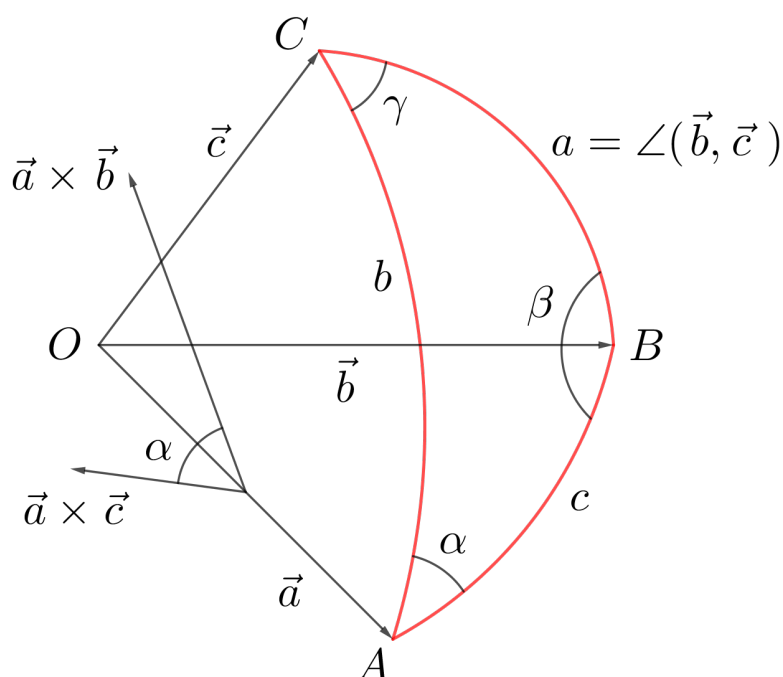


V prostoru $\mathbb{E}_3$ zvolme body O, A, B, C tak, aby vektory $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ byly *nekomplanární* a *jednotkové*, tj. $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 1$.

Opíšeme-li ze středu O jednotkovou kouli, pak body A, B, C leží na kulové ploše poloměru jedna a tvoří vrcholy **sférického trojúhelníku**.

Rovina procházející body O, A, B protne kulovou plochu v tzv. **hlavní kružnici** a kratší část hlavní kružnice mezi body A, B vytvoří **stranu c sférického trojúhelníku**. Podobným způsobem vytvoříme strany a, b sférického trojúhelníku.

Úhel mezi stranami b, c při vrcholu A sférického trojúhelníku označíme α . Podobně značí β, γ úhly při vrcholech B, C . Tyto úhly tvoří **odchylky stěn** trojbokého jehlanu určeného body O, A, B, C .



- vrcholy A, B, C sférického trojúhelníku
- strany a, b, c sférického trojúhelníku
- úhly α, β, γ sférického trojúhelníku

Mezi prvky sférického trojúhelníku platí:

(1)	$a = \angle(\vec{b}, \vec{c})$	$b = \angle(\vec{c}, \vec{a})$	$c = \angle(\vec{a}, \vec{b})$
(2)	$\alpha = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c})$	$\beta = \angle(\vec{b} \times \vec{c}, \vec{b} \times \vec{a})$	$\gamma = \angle(\vec{c} \times \vec{a}, \vec{c} \times \vec{b})$
(3)	$\cos a = \vec{b} \cdot \vec{c}$	$\cos b = \vec{c} \cdot \vec{a}$	$\cos c = \vec{a} \cdot \vec{b}$
(4)	$\sin a = \ \vec{b} \times \vec{c}\ $	$\sin b = \ \vec{c} \times \vec{a}\ $	$\sin c = \ \vec{a} \times \vec{b}\ $
(5)	$\cos \alpha = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c})}{\ \vec{a} \times \vec{b}\ \cdot \ \vec{a} \times \vec{c}\ }$	$\cos \beta = \frac{(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{a})}{\ \vec{b} \times \vec{c}\ \cdot \ \vec{b} \times \vec{a}\ }$	$\cos \gamma = \frac{(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot (\vec{c} \times \vec{b})}{\ \vec{c} \times \vec{a}\ \cdot \ \vec{c} \times \vec{b}\ }$

Sinova věta pro sférický trojúhelník

Viz skripta, Věta 5, vzorec (3):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \vec{d}.$$

Pro $\vec{d} = \vec{a}$ dostaneme:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\underbrace{\vec{c} \times \vec{a}}_{=-\vec{a} \times \vec{c}}) = \underbrace{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}]}_0 \vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \vec{a}$$

tedy

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}).$$

V Euklidovské normě platí

$$\begin{aligned} \|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \vec{a}\| &= \|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\| \cdot \underbrace{\|\vec{a}\|}_{=1} = \|(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})\| = \\ &= \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{a} \times \vec{c}\| \cdot \sin \alpha = \sin c \cdot \sin b \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \sin c \cdot \sin b \cdot \sin \alpha$$

Podobně pokračujeme pro volby $\vec{d} = \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{c}$ cestou *cyklické zámeny*:

$$\begin{aligned}\vec{a} &\longrightarrow \vec{b} \longrightarrow \vec{c} \longrightarrow \vec{a} \\ a &\longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a \\ \alpha &\longrightarrow \beta \longrightarrow \gamma \longrightarrow \alpha\end{aligned}$$

$$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \sin c \cdot \sin b \cdot \sin \alpha$$

$$|[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]| = \sin a \cdot \sin c \cdot \sin \beta$$

$$|[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]| = \sin b \cdot \sin a \cdot \sin \gamma$$

Výměnou pořadí vektorů ve smíšeném součinu se mění nejvýše znaménko a s ohledem na absolutní hodnotu platí:

$$\sin c \cdot \sin b \cdot \sin \alpha = \sin a \cdot \sin c \cdot \sin \beta = \sin b \cdot \sin a \cdot \sin \gamma$$

$$| \cdot \frac{1}{\sin a \sin b \sin c}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

Ve sférickém trojúhelníku poměry sinů stran ku sinům protilehlých úhlů jsou si rovny.

Viz skripta, Věta 5, vzorec (1):

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$$

Pro $\vec{d} = \vec{a}$ dostaneme:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \underbrace{(\vec{c} \times \vec{a})}_{-\vec{a} \times \vec{c}} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{a}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{a}}_{\|\vec{a}\|^2=1})$$

tedy

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{a}) + \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{a} \times \vec{c}\| \cdot \cos \alpha,$$

pomocí (3) dostaneme

$$\cos a = \cos b \cos c + \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{a} \times \vec{c}\| \cdot \cos \alpha,$$

Vzorce (4) vedou k **první kosinové větě** pro stranu a :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Cyklickou záměnou $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$, $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha$ získáme postupně **první kosinové věty** pro zbývající strany b, c :

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \end{aligned}$$

Poznámka: Je-li $\gamma = \frac{\pi}{2}$, je sférický trojúhelník pravoúhlý a poslední vzorec dává tvar *Pythagorovy věty* pro pravoúhlý sférický trojúhelník:

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

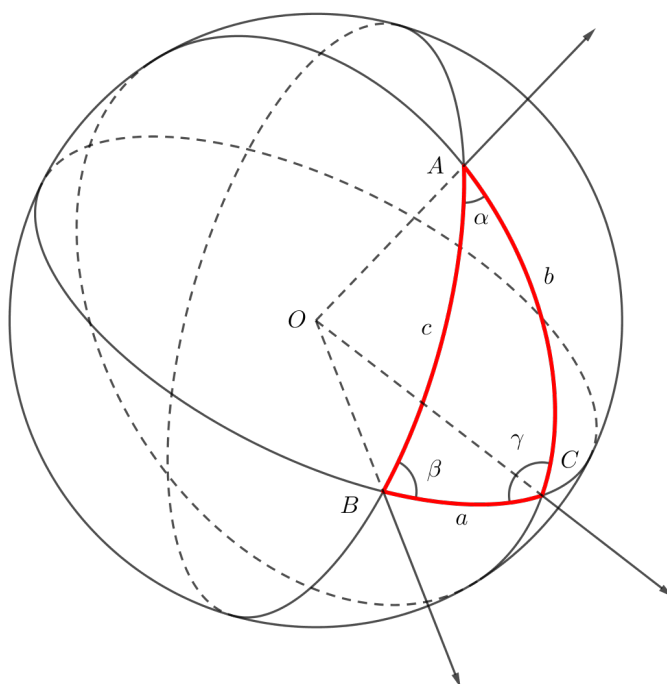
Definice

Hlavní kružnice na dané kouli je taková kružnice ležící na této kouli, jejíž střed leží ve středu koule. Dvěma body A, B na kouli, které neleží na témž průměru, lze vést právě jednu hlavní kružnici; menší z obou oblouků, které na této kružnici vytnou body A, B , má nejmenší délku d ze všech křivek na dané kouli spojujících body A, B . Číslo d se nazývá **sférická vzdálenost** bodů A, B . Sférická vzdálenost protějších bodů na kouli je rovna polovině obvodu hlavní kružnice.

Definice (Sférický trojúhelník)

Nechť A, B, C jsou tři body na kouli, které neleží na téže hlavní kružnici. Spojíme-li je oblouky $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ hlavních kružnic, které se mimo body A, B, C neprotínají, rozpadne se kulová plocha na dva sférické trojúhelníky o vrcholech A, B, C . Zvolíme-li speciálně oblouky $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ tak, aby se jejich délky rovnaly sférickým vzdálenostem jejich krajních bodů A, B, C , pak menší z obou takto získaných trojúhelníků — tj. ten, který leží uvnitř trojhranu tvořeného polopřímkami OA, OB, OC vycházející ze středu O koule — se nazývá **Eulerův trojúhelník**.

Rektorys, Karel a spol.: *Přehled užité matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), Praha 1963.



Definice

Strany a , b , c sférického trojúhelníka $\triangle ABC$ jsou délky příslušných oblouků $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ hlavních kružnic; jsou tedy určeny úhly $\angle BOC$, $\angle AOC$, $\angle AOB$ polopřímek OA , OB , OC a měří se v obloukové nebo stupňové míře.

Definice

Úhly α , β , γ sférického trojúhelníka $\triangle ABC$ jsou vnitřní úhly stěn trojhranu $OABC$; měří se v obloukové nebo stupňové míře.

Poznámka: Polopřímky spojující střed koule s vrcholy sférického trojúhelníka $\triangle ABC$ tvoří jeho **základní trojhran** $OABC$.

Rektorys, Karel a spol.: *Přehled užití matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), Praha 1963.

Věta

Strany a úhly sférického trojúhelníka jsou menší než 180° (menší než π).

Věta

Součet úhlů α , β , γ sférického trojúhelníka je vždy větší než 180° .

Definice

Sférickým excesem (nadbytkem) sférického trojúhelníka nazýváme číslo

$$\varepsilon^\circ = \alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ - 180^\circ.$$

Rektorys, Karel a spol.: *Přehled užití matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), Praha 1963.

Věta

Obsah sférického trojúhelníka je

$$P = \frac{\varepsilon^\circ}{180^\circ} \pi r^2$$

kde r je poloměr koule a ε° – nadbytek trojúhelníka vyjádřený ve stupních.

Rektorys, Karel a spol.: *Přehled užití matematiky*, Státní nakladatelství technické literatury (SNTL), Praha 1963.

Děkuji za pozornost!

