FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

5. Vektorový prostor, báze, dimenze, souřadnice vektoru

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

[1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6

[2] Chrastinová, Veronika: *Matematika I, Modul 3, Vektorová algebra a analytická geometrie*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, Brno 2004.

[3] Horňáková, Dagmar: *Matematika I_5, Vektorová algebra*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, vydal ECON publishing, s.r.o., Brno 2001. ISBN: 80-902268-9-2

Hermann Günther Grassmann

Definice

Množinu $M = \{x, y, z, \ldots\}$ nazveme (reálným) **lineárním prostorem**, když

$$x, y \in M \Longrightarrow x + y \in M$$

(na M je definováno sčítání prvků),

$$\alpha \in \mathbb{R}, x \in M \Longrightarrow \alpha x \in M$$

(na M je definováno násobení skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$),

pro každé $x, y \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a operace sčítání a násobení skalárem jsou pro každé $x, y, z \in M$ a každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vázány axiomy:

Definice (pokračování)

I1. $x + y = y + x$,

I2. $(x + y) + z = x + (y + z)$,

I3. existuje nulový prvek $o \in M$ takový, že $x + o = x$,

I4. ke každému prvku x existuje opačný prvek $-x$ tak, že platí $x+(-x) = o$,

II1. $1 \cdot x = x$,

II2. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

II3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

II4. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Poznámka:
Kolinearita (nekolinearita) a komplanarita (nekomplanarita) se zobecňují v lineárním prostoru na tzv. lineární závislost (lineární nezávislost) vektorů.

Lineární prostor, báze a dimenze

Definice

Jsou-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ vektory a $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ čísla, pak vektor

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n$$

nazveme **lineární kombinací** vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.
Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ nazveme **lineárně nezávislé**, když

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = \vec{o} \iff c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

tj. žádný z vektorů nelze zapsat jako lineární kombinaci vektorů zbývajících. V opačném případě jsou vetory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ **lineárně závislé**.

Definice

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ tvoří **bázi** lineárního prostoru M, když jsou lineárně nezávislé a každý další vektor $\vec{x} \in M$ je již jednoznačnou lineární kombinací vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, tj.

$$\vec{x} \in M \implies \vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}).$$

Počet n vektorů báze se nazývá **dimenze** lineárního prostoru M a koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ lineární kombinace $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n$ se nazývají **souřadnice vektoru** $\vec{x}$ v uspořádané bázi $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$.

Příklad 5.1

Určete lineární závislost či nezávislost vektorů $\vec{a} = (-3, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, -4)$, $\vec{c} = (11, -2, -2)$.

Příklad 5.2

Určete lineární závislost či nezávislost vektorů $\vec{a} = (1, 0, 7)$, $\vec{b} = (-1, 2, 4)$, $\vec{c} = (3, 2, 1)$.

Vektory v ortonormální bázi

Nechť $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ je uspořádaná pozitivní soustava vzájemně kolmých ($\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ pro $i \neq j$) a jednotkových ($\|\vec{e}_i\| = 1$) vektorů ($i, j \in \{1, 2, 3\}$). Sestavíme-li pro $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ rovnici

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \vec{o},$$

pak postupné skalární násobení rovnice vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vede k výsledku $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

pro $\vec{e}_1$:

$$\alpha_1 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{\|\vec{e}_1\|^2 = 1} + \alpha_2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_{0} + \alpha_3 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1}_{0} = \underbrace{\vec{o} \cdot \vec{e}_1}_{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Vektory v ortonormální bázi

Vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ jsou proto lineárně nezávislé, tvoří tzv. **ortonormální bázi**

$$\mathbf{E} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$$

prostoru $V(\mathbb{E}_3)$ a každý vektor $\vec{x} \in V(\mathbb{E}_3)$ je jejich lineární kombinací

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}).$$

- Ortonormálních bází je v prostoru $V(\mathbb{E}_3)$ nekonečný počet, liší se od sebe posunutím a otočením soustavy.
- Vždy uvažujeme jednu konkrétní soustavu, ke které se vtahují souřad-ncice vektoru $\vec{x} \in V(\mathbb{E}_3)$.

Skalární součin v ortonormální bázi

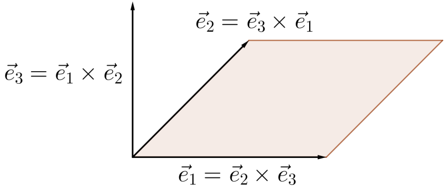
$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = \\
&= a_1b_1\underbrace{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1}_{1} + a_1b_2\underbrace{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2}_{0} + a_1b_3\underbrace{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3}_{0} + \\
&\quad + a_2b_1\underbrace{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1}_{0} + a_2b_2\underbrace{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2}_{1} + a_2b_3\underbrace{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3}_{0} + \\
&\quad + a_3b_1\underbrace{\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1}_{0} + a_3b_2\underbrace{\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2}_{0} + a_3b_3\underbrace{\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3}_{1} + \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.
\end{aligned}$$

Skalární součin v ortonormální bázi

Pro vektory $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ v ortonormální bázi **E** jsme získaly:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Vektorový součin v ortonormální bázi



$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = \\
&= a_1b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{\vec{o}} + a_1b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} + a_1b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2} + \\
&+ a_2b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{-\vec{e}_3} + a_2b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2}_{\vec{o}} + a_2b_3 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{\vec{e}_1} + \\
&+ a_3b_1 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{\vec{e}_2} + a_3b_2 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}_{-\vec{e}_1} + a_3b_3 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}_{\vec{o}} + \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3.
\end{aligned}
$$

Vektorový součin v ortonormální bázi

Pro vektory $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ v ortonormální bázi **E** jsme získaly:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3$$

Smýšený součin v ortonormální bázi

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\underbrace{\vec{b}\times\vec{c}}_{\vec{d}})$$

$$\begin{aligned}
\vec{d} = \vec{b}\times\vec{c} &= (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)\times(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) = \\
&= (\underbrace{b_2c_3 - b_3c_2}_{d_1})\vec{e}_1 + (\underbrace{b_3c_1 - b_1c_3}_{d_2})\vec{e}_2 + (\underbrace{b_1c_2 - b_2c_1}_{d_3})\vec{e}_3 = \\
&= d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2 + d_3\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{a}\cdot\vec{d} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2 + d_3\vec{e}_3) = \\
&= a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 = \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \\
&= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.
\end{aligned}$$

Smýšený součin v ortonormální bázi

Pro vektory $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$, $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$ v ortonormální bázi **E** jsme získaly:

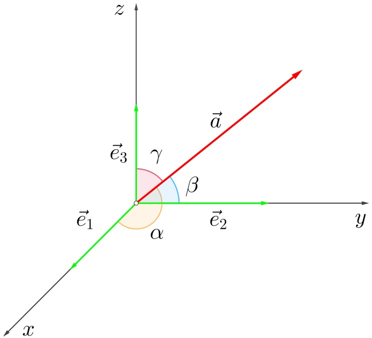
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Směrové kosiny

Definice

Úhly α, β, γ, které svírá vektor $\vec{a}$ s vektory ortonormální báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ nazýváme **směrovými úhly vektoru**, kosiny směrových úhlů nazýváme **směrovými kosiny vektoru** $\vec{a}$, takže

$$\cos\alpha = \cos\angle(\vec{a}, \vec{e}_1), \quad \cos\beta = \cos\angle(\vec{a}, \vec{e}_2), \quad \cos\gamma = \cos\angle(\vec{a}, \vec{e}_3).$$



Směrové kosiny

Věta

Souřadnice (a_1, a_2, a_3) *vektoru* $\vec{a}$ *vzhledem k bázi* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *jsou skalárními součiny tohoto vektoru s příslušnými vektory báze, tedy*

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1, \quad a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2, \quad a_3 = \vec{a} \cdot \vec{e}_3$$

a pro směrové kosiny vektoru $\vec{a}$ *platí*

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\|\vec{a}\|}(a_1, a_2, a_3).$$

Důkaz:

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1 = \|\vec{a}\| 1 \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) = \|\vec{a}\| \cos \alpha, \Longrightarrow \cos \alpha = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|},$$
$$a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2 = \|\vec{a}\| 1 \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) = \|\vec{a}\| \cos \beta, \Longrightarrow \cos \beta = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|},$$
$$a_3 = \vec{a} \cdot \vec{e}_3 = \|\vec{a}\| 1 \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_3) = \|\vec{a}\| \cos \gamma, \Longrightarrow \cos \gamma = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}.$$

Směrové kosiny

Věta

Součet čtverců směrových kosinů vektoru $\vec{a}$ je roven jedné, tj.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Důkaz:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{a_2^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{a_3^2}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{\|\vec{a}\|^2}{\|\vec{a}\|^2} = 1.$$

Směrové kosiny

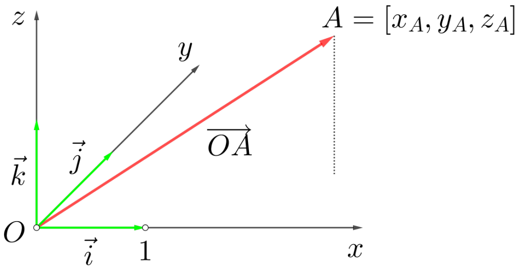
Věta

Směrové kosiny vektoru $\vec{a}$ jsou souřadnicemi příslušného jednotkového vektoru $\vec{a}^{\,o}$.

Důkaz: Pro jednotkový vektor $\vec{a}^o$ vektoru $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ platí':

$$\vec{a}^{\,o} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{e}_1 + \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{e}_2 + \frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{e}_3,$$
$$= \cos\alpha\ \vec{e}_1 + \cos\beta\ \vec{e}_2 + \cos\gamma\ \vec{e}_3.$$

Zvolíme-li v $\mathbb{E}_3$ pevný bod O a uspořádanou pozitivní ortonormální bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ ve $V(\mathbb{E}_3)$, pak dostaneme tzv. **kartézský souřadnicový systém** a označujeme jej $\langle O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$. Bod O nazýváme **počátkem** a přímky určené bodem O a postupně vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nazýváme **souřadnicovými osami** x, y, z. Je konvence označovat tuto speciální bázi jako $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ namísto $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$.



Vektory v souřadnicové soustavě prostoru $\mathbb{E}_3$

S každým bodem A je možné uvažovat polohový vektor (rádiusvektor)

$$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$$

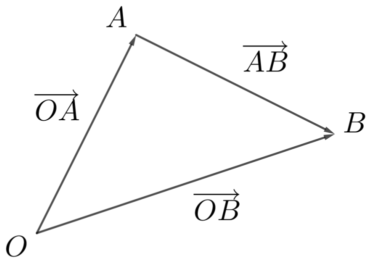
bodu A. Zápis vektoru $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ budeme zkracovat na tvar

$$\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} = (x_A, y_A, z_A),$$

čísla x_A, y_A, z_A nazveme souřadnicemi bodu A a píšeme $A = [x_A, y_A, z_A]$.

Dvěma různými body $A = [x_A, y_A, z_A]$, $B = [x_B, y_B, z_B]$ je pak určen vektor:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \\ &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).\end{aligned}$$



Děkuji za pozornost!