

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

5. Vektorový prostor, báze, dimenze, souřadnice vektoru

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura



- [1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6
- [2] Chrastinová, Veronika: *Matematika I, Modul 3, Vektorová algebra a analytická geometrie*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, Brno 2004.
- [3] Horňáková, Dagmar: *Matematika I₅, Vektorová algebra*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, vydal ECON publishing, s.r.o., Brno 2001. ISBN: 80-902268-9-2



Hermann Günther Grassmann

Lineární prostor, báze a dimenze

Definice

Množinu $M = \{x, y, z, \dots\}$ nazveme (reálným) **lineárním prostorem**, když

$$x, y \in M \implies x + y \in M$$

(na M je definováno sčítání prvků),

$$\alpha \in \mathbb{R}, x \in M \implies \alpha x \in M$$

(na M je definováno násobení skalárem $\alpha \in \mathbb{R}$),

pro každé $x, y \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a operace sčítání a násobení skalárem jsou pro každé $x, y, z \in M$ a každé $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vázány axiomy:

Definice (pokračování)

- I1. $x + y = y + x$,
- I2. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- I3. existuje nulový prvek $o \in M$ takový, že $x + o = x$,
- I4. ke každému prvku x existuje opačný prvek $-x$ tak, že platí $x + (-x) = o$,
- II1. $1 \cdot x = x$,
- II2. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
- II3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,
- II4. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Poznámka:

Kolinearita (nekolinearita) a komplanarita (nekomplanarita) se zobecňují v lineárním prostoru na tzv. lineární závislost (lineární nezávislost) vektorů.

Definice

Jsou-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ vektory a $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ čísla, pak vektor

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n$$

nazveme **lineární kombinací** vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ nazveme **lineárně nezávislé**, když

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n = \vec{o} \iff c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

tj. žádný z vektorů nelze zapsat jako lineární kombinaci vektorů zbývajících. V opačném případě jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ **lineárně závislé**.

Definice

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ tvoří **bázi** lineárního prostoru M , když jsou lineárně nezávislé a každý další vektor $\vec{x} \in M$ je již jednoznačnou lineární kombinací vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, tj.

$$\vec{x} \in M \implies \vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n \quad (c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}).$$

Počet n vektorů báze se nazývá **dimenze** lineárního prostoru M a koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ lineární kombinace $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n$ se nazývají **souřadnice vektoru** $\vec{x}$ v uspořádané bázi $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$.

Příklad 5.1

Určete lineární závislost či nezávislost vektorů $\vec{a} = (-3, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, -4)$, $\vec{c} = (11, -2, -2)$.

Příklad 5.2

Určete lineární závislost či nezávislost vektorů $\vec{a} = (1, 0, 7)$, $\vec{b} = (-1, 2, 4)$, $\vec{c} = (3, 2, 1)$.

Nechť $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ je uspořádaná pozitivní soustava vzájemně kolmých ($\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ pro $i \neq j$) a jednotkových ($\|\vec{e}_i\| = 1$) vektorů ($i, j \in \{1, 2, 3\}$). Sestavíme-li pro $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ rovnici

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = \vec{o},$$

pak postupné skalární násobení rovnice vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vede k výsledku $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

pro $\vec{e}_1$:

$$\alpha_1 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_{\|\vec{e}_1\|^2=1} + \alpha_2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_0 + \alpha_3 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1}_0 = \underbrace{\vec{o} \cdot \vec{e}_1}_0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ jsou proto lineárně nezávislé, tvoří tzv. **ortonormální bázi**

$$\mathbf{E} = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$$

prostoru $V(\mathbb{E}_3)$ a každý vektor $\vec{x} \in V(\mathbb{E}_3)$ je jejich lineární kombinací

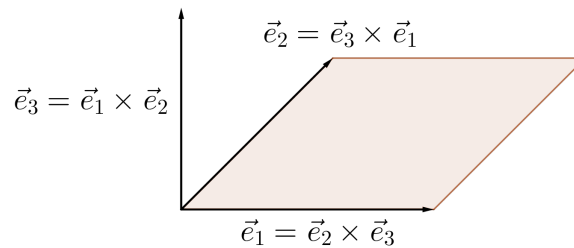
$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}).$$

- Ortonormálníchází je v prostoru $V(\mathbb{E}_3)$ nekonečný počet, liší se od sebe posunutím a otočením soustavy.
- Vždy uvažujeme jednu konkrétní soustavu, ke které se vtaňují souřadnice vektoru $\vec{x} \in V(\mathbb{E}_3)$.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \cdot (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = \\ &= a_1b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}_1 + a_1b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}_0 + a_1b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3}_0 + \\ &\quad + a_2b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1}_0 + a_2b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}_1 + a_2b_3 \underbrace{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}_0 + \\ &\quad + a_3b_1 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1}_0 + a_3b_2 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2}_0 + a_3b_3 \underbrace{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3}_1 = \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.\end{aligned}$$

Pro vektory $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ v ortonormální bázi E jsme získali:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$



$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = \\ &= a_1b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{\vec{0}} + a_1b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{\vec{e}_3} + a_1b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{-\vec{e}_2} + \\ &\quad + a_2b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{-\vec{e}_3} + a_2b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2}_{\vec{0}} + a_2b_3 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{\vec{e}_1} + \\ &\quad + a_3b_1 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{\vec{e}_2} + a_3b_2 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}_{-\vec{e}_1} + a_3b_3 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}_{\vec{0}} + \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Pro vektory $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ v ortonormální bázi E jsme získali:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c})}_{\vec{d}}$$

$$\begin{aligned}\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c} &= (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \times (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) = \\ &= \underbrace{(b_2c_3 - b_3c_2)}_{d_1}\vec{e}_1 + \underbrace{(b_3c_1 - b_1c_3)}_{d_2}\vec{e}_2 + \underbrace{(b_1c_2 - b_2c_1)}_{d_3}\vec{e}_3 = \\ &= d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2 + d_3\vec{e}_3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{d} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \cdot (d_1\vec{e}_1 + d_2\vec{e}_2 + d_3\vec{e}_3) = \\ &= a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 = \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.\end{aligned}$$

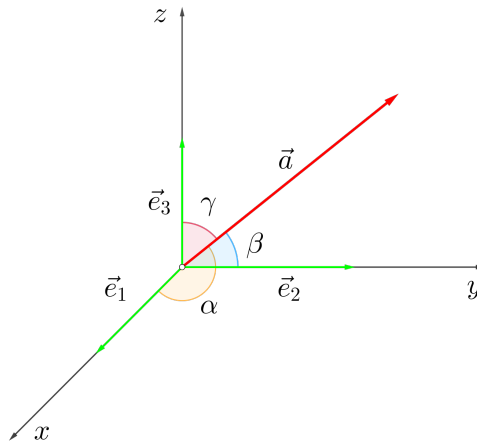
Pro vektory $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$,
 $\vec{c} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3$ v ortonormální bázi **E** jsme získaly:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Definice

Úhly α, β, γ , které svírá vektor $\vec{a}$ s vektory ortonormální báze $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ nazýváme **směrovými úhly vektoru**, kosiny směrových úhlů nazýváme **směrovými kosiny vektoru** $\vec{a}$, takže

$$\cos \alpha = \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1), \quad \cos \beta = \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2), \quad \cos \gamma = \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_3).$$



Věta

Souřadnice (a_1, a_2, a_3) vektoru $\vec{a}$ vzhledem k bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ jsou skalárními součiny tohoto vektoru s příslušnými vektory báze, tedy

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1, \quad a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2, \quad a_3 = \vec{a} \cdot \vec{e}_3$$

a pro směrové kosiny vektoru $\vec{a}$ platí

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\|\vec{a}\|} (a_1, a_2, a_3).$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1 &= \|\vec{a}\| 1 \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_1) = \|\vec{a}\| \cos \alpha, \implies \cos \alpha = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \\ a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2 &= \|\vec{a}\| 1 \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_2) = \|\vec{a}\| \cos \beta, \implies \cos \beta = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}, \\ a_3 = \vec{a} \cdot \vec{e}_3 &= \|\vec{a}\| 1 \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_3) = \|\vec{a}\| \cos \gamma, \implies \cos \gamma = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}. \end{aligned}$$

Věta

Součet čtverců směrových kosinů vektoru $\vec{a}$ je roven jedné, tj.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Důkaz:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_1^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{a_2^2}{\|\vec{a}\|^2} + \frac{a_3^2}{\|\vec{a}\|^2} = \frac{\|\vec{a}\|^2}{\|\vec{a}\|^2} = 1.$$

Věta

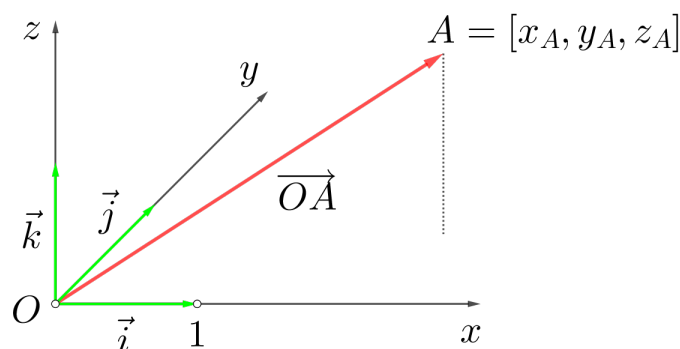
Směrové kosiny vektoru $\vec{a}$ jsou souřadnicemi příslušného jednotkového vektoru $\vec{a}^o$.

Důkaz: Pro jednotkový vektor $\vec{a}^o$ vektoru $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ platí:

$$\begin{aligned}\vec{a}^o &= \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{e}_1 + \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{e}_2 + \frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \cdot \vec{e}_3, \\ &= \cos \alpha \vec{e}_1 + \cos \beta \vec{e}_2 + \cos \gamma \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Vektory v souřadnicové soustavě prostoru $\mathbb{E}_3$

Zvolíme-li v $\mathbb{E}_3$ pevný bod O a uspořádanou pozitivní ortonormální bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$ ve $V(\mathbb{E}_3)$, pak dostaneme tzv. **kartézský souřadnicový systém** a označujeme jej $\langle O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$. Bod O nazýváme **počátkem** a přímky určené bodem O a postupně vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ nazýváme **souřadnicovými osami** x, y, z . Je konvence označovat tuto speciální bázi jako $\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle$ namísto $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle$.



S každým bodem A je možné uvažovat polohový vektor (rádusvektor)

$$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}$$

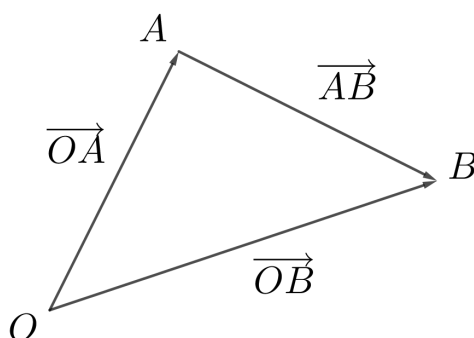
bodů A . Zápis vektoru $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ budeme zkracovat na tvar

$$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k} = (x_A, y_A, z_A),$$

čísla x_A, y_A, z_A nazveme souřadnicemi bodu A a píšeme $A = [x_A, y_A, z_A]$.

Dvěma různými body $A = [x_A, y_A, z_A]$, $B = [x_B, y_B, z_B]$ je pak určen vektor:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k} \\ &= (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A). \end{aligned}$$



Děkuji za pozornost!

