

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

6. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

- [1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6
- [2] Novotný, Jiří: *Matematika I₄, Lineární algebra*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 1995. ISBN: 80-85867-65-6



Augustin Louis Cauchy

Vlastní čísla a vlastní vektory

$$A - \lambda E_n = A - \lambda E$$

charakteristická matice příslušná k matici A , $\lambda \in \mathbb{C}$, E je jednotková matice řádu n

$$\det(A - \lambda E)$$

charakteristický polynom matice A

vlastní čísla matice A

kořeny charakteristického polynomu

spektrum matice A

soubor vlastních čísel matice A , každé vlastní číslo je v něm uvedeno tolikrát, kolik činí jeho násobnost

vlastní vektor matice A příslušný k číslu λ

nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

vlastní podprostor $V_\lambda(A)$, příslušný k číslu λ

$V_\lambda(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n; A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \vec{x} \neq \vec{0}\}$

algebraická násobnost vlastního čísla λ

násobnost kořene λ charakteristického polynomu

geometrická násobnost vlastního čísla λ

dimenze podprostoru $V_\lambda(A)$ – „maximální počet“ lineárně nezávislých řešení soustavy $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$

Poznámky:

1. Maticovou rovnici $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ lze vyjádřit ve tvaru $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$. Tento *homogenní* systém má netriviální řešení ($\vec{x} \neq \vec{0}$) tehdy, když je $\det(A - \lambda E) = 0$.
2. Je-li $\vec{x}$ vlastním vektorem matice A , pak každý konstantní násobek $k\vec{x}$, $k \neq 0$ (obecně $k \in \mathbb{C}$) je opět vlastním vektorem matice A .

Vlastnosti vlastních čísel a vlastních vektorů

1. Vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.
2. Jestliže pro každé vlastní číslo se jeho algebraická násobnost rovná geometrické násobnosti, pak existuje právě n lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A .
3. Všechna vlastní čísla reálné symetrické matice ($A^T = A$) jsou reálná.
4. Vlastní vektory reálné symetrické matice vzhledem k různým vlastním číslům jsou ortogonální.

Příklad 6.1

Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6.2

Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Děkuji za pozornost!

