FACULTY OF CIVIL ENGINEERING institute of mathematics and descriptive geometry

BAA008 Matematika I

pro obor Geodézie a kartografie

7. Aplikace vektorového počtu v analytické geometrii

Mgr. et Mgr. JAN ŠAFAŘÍK, Ph.D.

Fakulta stavební VUT v Brně

Základní literatura

[1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6

[2] Chrastinová, Veronika: *Matematika I, Modul 3, Vektorová algebra a analytická geometrie*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, Brno 2004.

[3] Horňáková, Dagmar: *Matematika I_6, Analytická geometrie*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, vydal ECON publishing, s.r.o., Brno 1995. ISBN: 80-241-0602-X

René Descartes

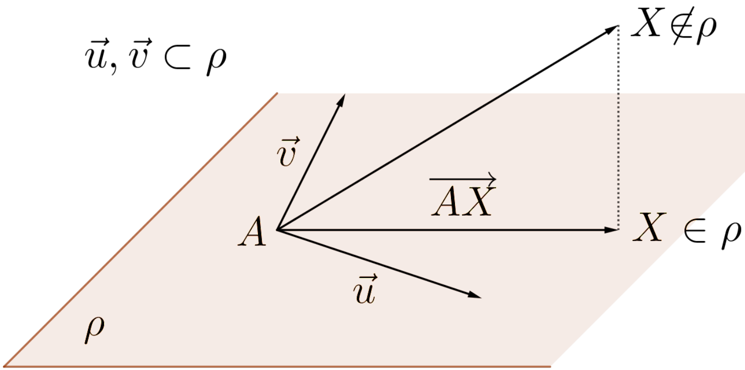
Zápis

$$\rho = [A; \vec{u}; \vec{v}]$$

značí, že rovina ρ je v prostoru $\mathbb{E}_3$ určena bodem $A = [x_A, y_A, z_A] \in \rho$ a dvěma nekolineárními vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ležícími v rovině ρ.

Můžeme použít několik různých přístupů k popisu roviny, kdy určíme podmínky, za kterých je obecný bod $X = [x, y, z]$ bodem roviny.

Libovolný bod $X = [x, y, z] \in \rho$, právě když vektory $\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ jsou komplanární.



Toto lze vyjádřit dvěma způsoby:

1. Parametrická rovnice roviny

$\overrightarrow{AX} = t\vec{u} + s\vec{v}$ $(t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry) jsou **parametrické rovnice roviny**, které rozepisujeme do souřadnic

$$\begin{aligned} x &= x_A + tu_1 + sv_1, \\ y &= y_A + tu_2 + sv_2, \\ z &= z_A + tu_3 + sv_3. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic umíme vyčíst souřadnice bodu $A \in \rho$ i vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ roviny ρ.

2. Obecná rovnice roviny

Pro komplanárnní vektory je smýšený součin $[\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$. Proto

$$[\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - x_A) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2) - (y - y_A) \cdot (u_1 v_3 - u_3 v_1) +$$

$$+ (z - z_A) \cdot (u_1 v_2 - u_2 v_1) =$$

$$= \underline{ax + by + cz + d = 0}$$

a výsledkem je **obecná rovnice roviny** ρ.

Z obecné rovnice roviny snadno získáme tzv. *úsekovou rovnici*, která je užitečná pro názornější představu polohy roviny v kartézské souřadnicové soustavě:

$$
\begin{aligned}
ax + by + cz + d &= 0, \\
ax + by + cz &= -d, \qquad \Big| \cdot \left(-\frac{1}{d}\right) \\
-\frac{ax}{d} - \frac{by}{d} - \frac{cz}{d} &= 1, \\
\frac{x}{-\frac{d}{a}} + \frac{y}{-\frac{d}{b}} + \frac{z}{-\frac{d}{c}} &= 1,
\end{aligned}
$$

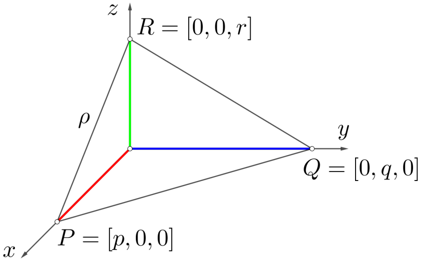
$$
\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.
$$

3. Úseková rovnice roviny

Úseková rovnice roviny ρ je

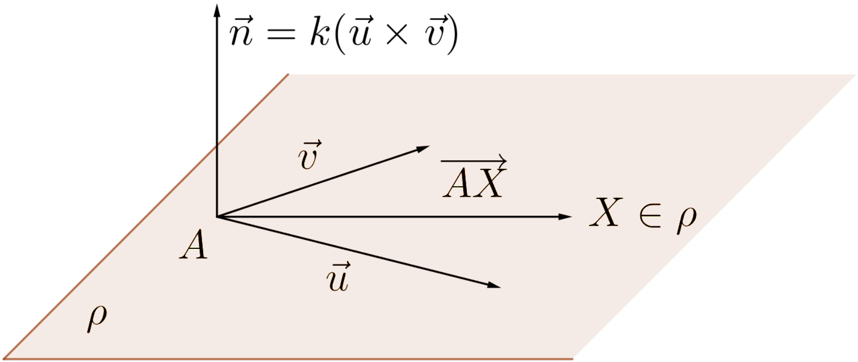
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

kde p, q, r jsou nenulová čísla nazývaná úseky na osách. Body $P = [p, 0, 0]$, $Q = [0, q, 0]$, $R = [0, 0, r]$ jsou průsečíky roviny ρ se souřadnicovými osami x, y, z.



Vektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \neq \vec{o}$ kolmý k rovině ρ se nazývá **normálový vektor** roviny ρ. Z vlastností vektorového součinu víme, že vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý ke každému z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ ležících v rovině ρ, proto je kolmý k rovině. Za normálový vektor roviny můžeme volit libovolný nenulový vektor kolineární s vektorem $\vec{u} \times \vec{v}$.

Libovolný bod $X = [x, y, z] \in \rho$, právě když vektory $\overrightarrow{AX}$, $\vec{n}$ jsou kolmé.



Podmínku kolmosti vektorů vyjadřuje skalární součin

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} &= (x - x_A, y - y_A, z - z_A) \cdot (n_1, n_2, n_3) = \\ &= n_1 x + n_2 y + n_3 z - (n_1 x_A + n_2 y_A + n_3 z_A) = \\ &= ax + by + cz + d = 0.\end{aligned}$$

Vidíme, že koeficienty a, b, c, obecného tvaru rovnice roviny ρ jsou souřadnice normálového vektoru roviny ρ, tj.

$$\vec{n} = (a, b, c),$$

kde vektor $\vec{n}$ je kolineární s vektorem $\vec{u} \times \vec{v}$.

Příklad 7.1

Napište obecnou a parametrickou rovnici roviny OXY (ortogonální soustavy souřadnic).

Příklad 7.2

Určete rovinu $\rho(A, B, C)$, $A = [0, -2, 1]$, $B = [0, 4, 0]$, $C = [-1, 3, 5]$.

Příklad 7.3

Leží body $A = [0, -3, 2]$, $B = [6, -3, 0]$, $C = [3, 0, 3]$ a $D = [7, 2, 3]$ v jedné rovině? Pokud ano, určete ji.

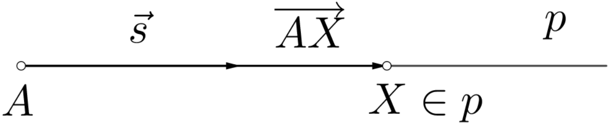
Zápis

$$p = [A; \vec{s}]$$

značí, že přímka p je v prostoru $\mathbb{E}_3$ určena bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$.

Obecný bod $X = [x, y, z]$ je bodem přímky p právě, když jsou vektory $\vec{s}$, $\overrightarrow{AX}$ kolineární, tj.

$$\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{s} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$



1. Parametrické rovnice přímky

Rozepsáním vektorové rovnice $\overrightarrow{AX} = t \cdot \vec{s}$ a úpravou složek získáme **parametrické rovnice přímky** p,

$$\begin{aligned} p: x &= x_A + ts_1, \\ y &= y_A + ts_2, \qquad t \in \mathbb{R} \text{ je parametr} \\ z &= z_A + ts_3. \end{aligned}$$

2. Kanonické rovnice přímky

Zcela formálně můžeme v každé z parametrických rovnic vyjádřit parametr t a obdržíme **kanonické rovnice přímky** p ve tvaru

$$p : \frac{x - x_A}{s_1} = \frac{y - y_A}{s_2} = \frac{z - z_A}{s_3} (= t).$$

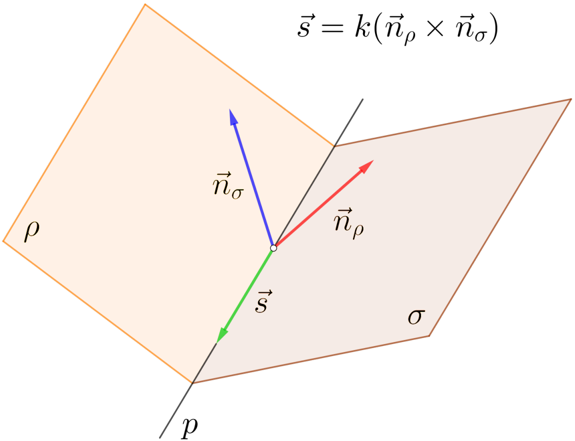
3. Přímka jako průsečnice dvou rovin

Často je **přímka** zadána **jako průsečnice dvou rovin**

$$p: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases},$$

které nejsou rovnoběžné nebo totožné. To je splněno, když normálové vektory $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ rovin nejsou kolineární. Směrový vektor $\vec{s}$ přímky je kolineární s vektorem $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Přímka v $\mathbb{E}_3$



Příklad 7.4

Je dán kanonický tvar přímky $p : \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-7}{3}$. Určete parametrické vyjádření přímky, respektive pomocí průsečnice dvou rovin.

Příklad 7.5

Určete kanonický tvar přímky dané bodem $A = [2, 1, -3]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (1, -3, 1)$.

Příklad 7.6

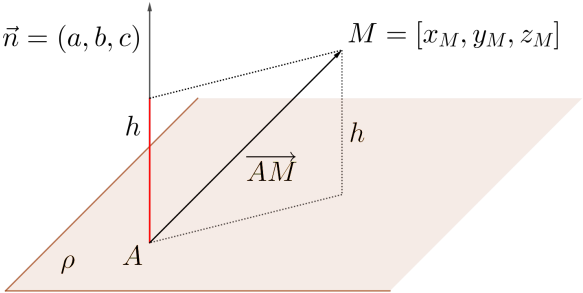
Určete parametrické vyjádření a kanonický tvar přímky

$$p : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - 3z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Úlohy metrické

- Vzdálenost bodu od roviny
- Vzdálenost bodu od přímky
- Úhel dvou rovin
- Úhel dvou přímek
- Úhel přímky a roviny

Vzdálenost bodu od roviny



Vzdálenost bodu $M = [x_M, y_M, z_M]$ od roviny $\rho : ax + by + cz + d = 0$ určené bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ a normálovým vektorem $\vec{n} = (a, b, c)$ je číslo h, které je průmětem délky vektoru $\overrightarrow{AM}$ do vektoru $\vec{n}$. Proto

$$h = \|\overrightarrow{AM}_{\vec{n}}\| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}|}{\|\vec{n}\|}$$

Vzdálenost bodu od roviny

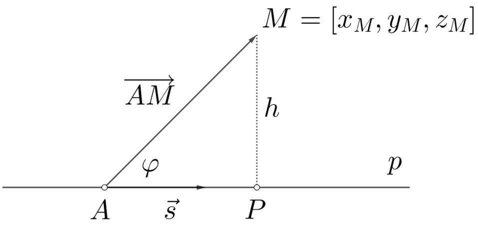
$$
\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} &= (a, b, c,) \cdot (x_M - x_A, y_M - y_A, z_M - z_A) = \\
&= a(x_M - x_A) + b(y_M - y_A) + c(z_M - z_A) = \\
&= ax_M + by_M + cz_M - \underbrace{(ax_A + by_A + cz_A)}_{-d} = \\
&= ax_M + by_M + cz_M + d
\end{aligned}
$$

$$
\|\vec{n}\| = \sqrt{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}
$$

Dosazením do výše uvedeného vzorce dostáváme známý středoškolský vzorec:

$$
h = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}
$$

Vzdálenost bodu od přímky



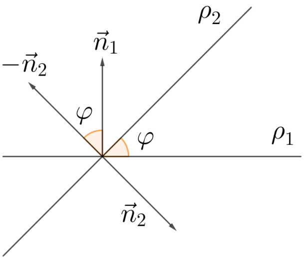
$$\sin\varphi=\frac{h}{\|\overrightarrow{AM}\|}\Rightarrow h=\|\overrightarrow{AM}\|\sin\varphi$$

$$\|\overrightarrow{AM}\times\vec{s}\|=\|\overrightarrow{AM}\|\cdot\|\vec{s}\|\sin\varphi$$

$$\|\overrightarrow{AM}\times\vec{s}\|=\|\vec{s}\|\cdot h$$

Vzdálenost h bodu $M=[x_M,y_M,z_M]$ od přímky $p=[A;\vec{s}]$ je vzdáleností bodu M od kolmého průmětu P bodu M na přímku p. Pomocí vektorového součinu vyjádříme vzdálenost bodu od přímky jako

$$h=\frac{\|\vec{s}\times\overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{s}\|}$$

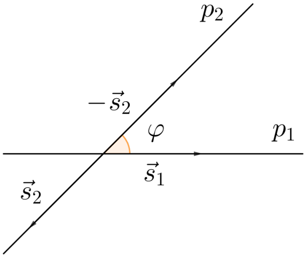


Úhel φ rovin ρ_1, ρ_2 vybíráme vždy ostrý. Úhel rovin je úhlem normálových vektorů rovin

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|},$$

kde uvažujeme v čitateli absolutní hodnotu, abychom ošetřili případ uvedený v obrázku a počítali s ostrým úhlem φ.

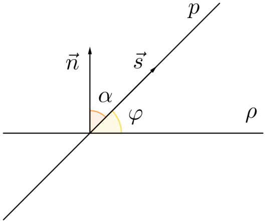
Úhel dvou přímek



Úhel φ přímek p_1, p_2 vybíráme vždy ostrý. Úhel přímek je úhlem směrových vektorů přímek

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{\|\vec{s}_1\| \cdot \|\vec{s}_2\|},$$

kde uvažujeme v čitateli absolutní hodnotu, abychom ošetřili případ uvedený v obrázku a počítali s ostrým úhlem φ.



Úhel φ přímky p s rovinou ρ vybíráme vždy ostrý. Úhel přímky s rovinou je doplňkem úhlu α směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny do $\frac{\pi}{2}$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Víme, že $\vec{n} \cdot \vec{s} = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{s}\| \cos\alpha = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{s}\| \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{s}\| \sin\varphi$. Proto v obecném případě klademe

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{s}\|},$$

kde uvažujeme v čitateli absolutní hodnotu, abychom počítali s ostrým úhlem φ.

Příklad 7.7

Určete vzdálenost dvou rovnoběžných přímek $p: \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$

a $q: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-10}{1}$.

Úlohy polohy

- Vzájemná poloha dvou rovin
- Vzájemná poloha přímky a roviny
  - Průsečík křímky s rovinou
- Vzájemná poloha dvou přímek
  - Průsečík různoběžek
- Nejkratší vzdálenost mimoběžek

Vzájemná poloha dvou rovin

K rovinám $\rho_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $\rho_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ najdeme body $A_1 \in \rho_1$, $A_2 \in \rho_2$ a odpovídající normálové vektory $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

1. Jsou-li vektory $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ kolineární, jsou roviny ρ_1, ρ_2 **rovnoběžné**.
   1.1 Je-li navíc například $A_1 \in \rho_2$, pak jsou roviny ρ_1, ρ_2 **totožné**.
   1.2 Jestliže $A_1 \notin \rho_2$, pak jsou roviny ρ_1, ρ_2 **rovnoběžné a různé**. Stanovením vzdálenosti bodu $A_1 \in \rho_1$ od roviny ρ_2 určíme vzdálenost obou rovnoběžných rovin.
2. Jsou-li vektory $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ nekolineární, jsou roviny ρ_1, ρ_2 **různoběžné** a protínají se v jedné přímce p. Stanovujeme pak úhel rovin a nejčastěji parametrické rovnice přímky p.

Vzájemná poloha přímky a roviny

Určíme bod A a normálový vektor $\vec{n}$ roviny ρ, bod B a směrový vektor $\vec{s}$ přímky p. Z geometrických významů obou vektorů vyplývá:

1. Jsou-li vektory $\vec{s}, \vec{n}$ kolmé, je **přímka** p **rovnoběžná s rovinou** ρ.
   - 1.1 Je-li $B \in \rho$, pak leží přímka p v rovině ρ
   - 1.2 Jestliže $B \notin \rho$, pak najdeme vzdálenost přímky p od roviny ρ jako vzdálenost bodu B od roviny ρ.
2. Nejsou-li vektory $\vec{s}, \vec{n}$ kolmé, pak přímka p protíná rovinu ρ v průsečíku P přímky s rovinou. Stanovujeme úhel přímky s rovinou a souřadnice průsečíku P.

Průsečík přímky s rovinou

$$\begin{aligned} p: x &= x_B + ts_1 \\ y &= y_B + ts_2 \\ z &= z_B + ts_3, \quad t \in \mathbb{R} \\ \rho: ax &+ by + cz + d = 0 \end{aligned}$$

Přímka $p = [B; \vec{s}]$ má s rovinou $\rho = [A; \vec{n}]$ průsečík $P = [x_P, y_P, z_P]$ v případě, že $\vec{s} \cdot \vec{n} \neq 0$. Pak jsou současně splněny rovnice

$$\begin{aligned} x_P &= x_B + t_P s_1 \\ y_P &= y_B + t_P s_2 \\ z_P &= z_B + t_P s_3 \end{aligned} \qquad ax_P + by_P + cz_P + d = 0$$

pro hodnotu t_P parametru bodu P. Dosazením nalezeného t_P do výše uvedených rovnic ihned obdržíme souřadnice průsečíku P přímky p s rovinou ρ a identickou rovnici $0 = 0$.

Vzájemná poloha dvou přímek

Nechť $p = [A; \vec{s}_p]$, $q = [B; \vec{s}_q]$ jsou dvě přímky určené odpovídajícími body a směrovými vektory.

1. Jsou-li vektory $\vec{s}_p$, $\vec{s}_q$ kolineární, jsou **přímky** p, q **rovnoběžné**.
   1.1 Je-li například $A \in q$, pak jsou přímky p, q **totožné** $(p \equiv q)$.
   1.2 Je-li například $A \notin q$, pak jsou přímky p, q **rovnoběžné, různé**. Vzdálenost bodu A od přímky q (bodu B od přímky p) určuje vzdálenost rovnoběžek.
2. Jsou-li vektory $\vec{s}_p$, $\vec{s}_q$ nekolineární, jsou **přímky** p, q **různoběžné** nebo **mimoběžné**. Body A, B určují vektor $\overrightarrow{AB} \in V(\mathbb{E}_3)$.
   2.1 Je-li smýšený součin $[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \overrightarrow{AB}] = 0$, leží přímky p, q v jedné rovině a přímky jsou **různoběžné**. Určujeme úhel přímek, průsečík přímek a rovinu, ve které různoběžky leží.
   2.2 Je-li smýšený součin $[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \overrightarrow{AB}] \neq 0$, jsou p, q přímky **mimoběžné**. Určujeme úhel mimoběžek a jejich nejkratší vzdálenost.

Označme $\vec{s}_p = (s_1, s_2, s_3)$, $\vec{s}_q = (u_1, u_2, u_3)$. Pro průsečík $P = [x_P, y_P, z_P]$ různoběžek platí s využitím parametrických rovnic podmínky

$$\begin{aligned} x_P &= x_A + t_P s_1 = x_B + \tau_P u_1 \\ y_P &= y_A + t_P s_2 = y_B + \tau_P u_2 \\ z_P &= z_A + t_P s_3 = z_B + \tau_P u_3 \end{aligned} \quad ,$$

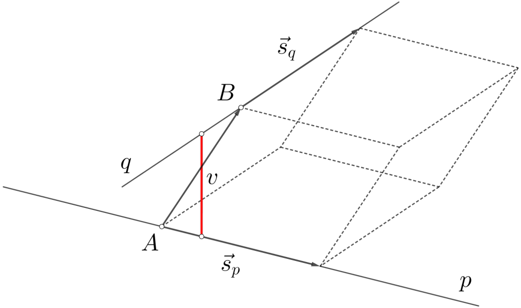
kde neznámé t_P, τ_P jsou hodnoty parametrů bodu P v odpovídajících parametrických rovnicích. Jedná se o soustavu tří rovnic pro dvě neznámé t_P, τ_P, která má v případě různoběžek právě jedno řešení. Toto řešení určuje po dosazení do výše uvedených rovnic souřadnice hledaného bodu P.

Nejkratší vzdálenost mimoběžek

Nejkratší vzdálenost mimoběžek $p = [A; \vec{s}_p]$, $q = [B; \vec{s}_q]$ je určena výškou

$$v = \frac{|[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \overrightarrow{AB}]|}{\|\vec{s}_p \times \vec{s}_q\|}$$

rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{s}_p$, $\vec{s}_q$, $\overrightarrow{AB}$.



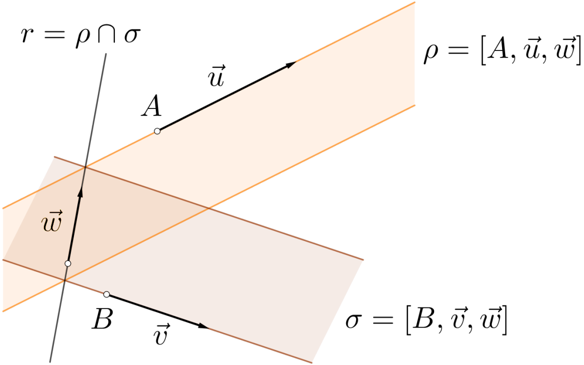
Příčky a osa mimoběžek

Pro mimoběžné přímky $p = [A; \vec{u}]$, $q = [B; \vec{v}]$ také určujeme

a) **příčku mimoběžek**, což je přímka r, která je různoběžná s oběma přímkami p, q,
b) **osu mimoběžek**, což je příčka r, která je k oběma přímkám p, q kolmá.

Máme-li nalézt příčku r mimoběžek p, q, která je rovnoběžná s vektorem $\vec{w}$, pro který platí $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$, pak stačí například

1. nalézt roviny $\rho = [A, \vec{u}, \vec{w}]$, $\sigma = [B, \vec{v}, \vec{w}]$,
2. vytvořit průnik $r = \rho \cap \sigma$.



Poznámka:

a) Při hledání příčky r mimoběžek p, q, která prochází zadaným bodem C, lze postupovat obdobně, jako když je zadán vektor $\vec{w}$.

b) Pro směrový vektor $\vec{w}$ osy mimoběžek zřejmě platí $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Příklad 7.8

Určete průsečík přímky $p : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ s rovinou $\rho : 3x - 2y + z - 3 = 0$.

Příklad 7.9

Bodem $A = [2, 1, -1]$ veďte rovinu kolmou k vektoru $\vec{v} = (1, -2, 3)$.

Příklad 7.10

Určete rovnici roviny, procházející rovnoběžkami $p : \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{1}$ a $q : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+5}{1} = \dfrac{z-5}{1}$.

Příklad 7.11

Určete rovnici roviny ρ, která prochází přímkou $p : \begin{cases} x + 2y + 14 = 0 \\ 3y + z + 21 = 0 \end{cases}$ a je rovnoběžná s přímkou $q : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$. Úlohu řešte svazkem rovin.

Příklad 7.12

Určete rovnici kolmice z bodu $A = [4, 1, 2]$ na přímku $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$.

Úlohy polohy

Příklad 7.13

Určete úhel mezi rovinami $\rho : 3x + y - 4z - 11 = 0$ a $\sigma : 2x - 2y + z + 4 = 0$.

Příklad 7.14

Napište rovnici přímky v kanonickém tvaru, která prochází bodem $K = [2, -3, -1]$ a je rovnoběžná se souřadnicovou osou z.

Příklad 7.15

Určete λ tak, aby roviny $\rho : x + 2y + 3z - 7 = 0$ a $\sigma : 3x + \lambda y + 2z - 5 = 0$ byly na sebe kolmé.

Příklad 7.16

Vyšetřete vzájemnou polohu přímek

$$p:\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \quad \text{a} \quad q: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{4}.$$

Děkuji za pozornost!